

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. L — ANNO CXXII

*(1982-1983)*



LIGUORI EDITORE



RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE



SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XLX — ANNO CXXII

*(1982-1983)*



LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore  
via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, 1983

Prima edizione italiana Settembre 1983

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1988 1987 1986 1985 1984 1983

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno  
dell'ultima ristampa*

I diritti di traduzione, di riproduzione e di adattamento totale  
o parziale e con qualsiasi mezzo (compresi microfilm, microfiches  
e riproduzioni fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi.

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1279 - 2

INDICE

A. Scherillo - Commemorazione di Giuseppe Imbò Commemorazione letta da Antonio Scherillo nell'adunanza del 7 Novembre 1981 .....	pag. 9
M. Rigutti - Commemorazione di Tito Nicolini (1899-1981) Commemorazione letta da Mario Rigutti nell'adunanza del 6 Febbraio 1982 .....	" 19
N. Avena, T. De Ruvo - Alcuni teoremi di singolarità eliminabili per soluzioni deboli di equazioni non lineari quasi-ellittiche .....	" 29
S. Dragotti - Una costruzione per particolari $\Delta$ -sets .....	" 43
S. Dragotti - Sulle strutture differenziabili parziali di un microfibrato su una varietà PL .....	" 53
L. Bader - Sull'isomorfismo di H-Anelli dotati di un modulo irriducibile e quasi fedele .....	" 65
E. Finamore, L. Minale, M. Ali Mohammed - The Sterols of the Somalian Sponge Plerophysilla Papyracea .....	" 81
S. Di Nocera, B. Russo, M. Torre - I depositi marini del ciclo pliocene inferiore-medio nei dintorni di Vietri di Potenza .....	" 87
M.T. Quagliariello, G. Napoleone - Dalla revisione del grande terremoto "napoletano" del 16 Dicembre 1857 un criterio di zonizzazione sismica .....	" 107
V. Zamparelli, L. Brancaccio, P. Di Girolamo - Nuove considerazioni sul terrazzo marino de 'La Starza' presso Pozzuoli .....	" 119
S. Dragotti - Ostruzioni ad estendere strutture differenziabili .....	" 133
G. De Simone, G. Di Maio - Alcune osservazioni su una classe di assiomi di separazione più deboli di $T_1$ ...	" 143
M. Renzi - Un'osservazione sulle funzioni assolutamente continue con derivata prima a variazione limitata ..	" 155
G. Caradonna - Sui sistemi di equazioni non lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico, in due variabili indipendenti .....	" 163
A. Leone, M. Maj - Gruppi finiti non submodulari a quozienti propri submodulari .....	" 185
E. Benedetti, E. Broccoli, P. Grimaldi - Restricted rotation in tertiary Amides. The Crystal structure of N-i-Propyl, N-Benzyl-o-Bromobenzamide .....	" 195

E. Benedetti, E. Broccoli, A. Di Nola - Restricted rotation in Tertiary Amides. The Crystal Structure of N- <i>i</i> -Propyl, N-Benzyl- <i>p</i> -Chlorobenzamide .....	Pag. 203
A. Nastro - Influence of Na or K on the Synthesis of ZSM-5 from Systems Containing TPA and NH <sub>4</sub> .....	" 211
P. Ciambelli, V. De Simone, R. Valentino - Separation of Oxygen and Nitrogen from air by Zeolitic tuff ...	" 227

A. Scherillo: Commemorazione

di Giuseppe Imbò

Commemorazione letta dal Socio Antonio Scherillo

Adunanza del 7 Novembre 1981

Nella mattinata di martedì 18 novembre dello scorso anno 1980 il nostro collega Giuseppe IMBO' dopo essersi trattenuto per qualche tempo in quella che era stata la direzione dell'Istituto di Fisica Terrestre, si stava recando in questa nostra sede accademica per ascoltare la commemorazione di Federico CAFIERO. Durante il breve tragitto, però, non si era sentito bene ed aveva pregato di essere riaccompagnato a casa sua in via Monte di Dio. Sembrava un malessere passeggero ed invece, durante la notte, le sue condizioni precipitavano e nelle prime ore del 19 novembre 1980, Giuseppe IMBO' quasi all'improvviso, spirava, proprio alla vigilia del sisma che doveva incidere tanto pesantemente sulla vita di Napoli e della Campania.

E' probabile che abbia portato con sé il rimpianto di non aver potuto assistere ad una ripresa -naturalmente pacifica- dell'attività del suo Vesuvio!

Giuseppe IMBO' nacque a Procida il 6 dicembre 1899. Il luogo di nascita fu determinante sulla formazione del Nostro, perchè l'isola di Procida, colle vestigia dei suoi vulcani e col suo ricco patrimonio storico ed artistico affinnò l'innato interesse di IMBO' (che tra l'altro aveva potuto assistere da Procida allo spettacolo della grande eruzione vesuviana del 1906) per la fisica della Terra ed insieme per la Storia e per l'arte.

All'inizio di questo secolo, inoltre, era ancora viva in Procida la grande tradizione marinara velica ed il Nostro apprese dal nonno, uomo di mare ed armatore di velieri ad interessarsi -secondo quanto l'amico mi raccontava- per i fenomeni meteorologici.

La personalità di IMBO' fu dunque caratterizzata da una forte propensione verso la fisica e la matematica, unita però ad uno spiccato spirito naturalistico: in conseguenza, quando s'iscrisse all'Università, scelse il corso di laurea in

fisica e divenne interno dell'Istituto di Fisica Terrestre.

IMBO' si laureò appunto con una tesi in fisica terrestre nella nostra Università nel 1923. Direttore dell'Istituto era allora C.B. RIZZO, scienziato illustre, ma non particolare cultore di vulcanologia: le vicende successive orientarono tuttavia sempre più IMBO' verso la sismologia e la vulcanologia.

Infatti, dopo la laurea, IMBO' fu per qualche tempo assistente presso l'Istituto di Fisica Terrestre e poi (fino al 1925) presso l'Osservatorio Vesuviano. Dal 1925 fu geofisico dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica e, come tale, distaccato all'Osservatorio Geofisico d'Ischia (ora soppresso) e quindi, fino al 1934 fu geofisico dell'Osservatorio Geofisico di Catania, di cui fu direttore dal 1928.

E' nel periodo passato presso l'Osservatorio di Catania che si delinea la personalità di IMBO' come sismologo e vulcanologo. A Catania, inoltre, egli ritrovò Antonio CARRELLI, allora direttore dell'Istituto di Fisica di quell'Università, al quale rimase sempre legato da fraterna amicizia.

Dal 1934 la carriera di IMBO' ebbe un rapidissimo sviluppo: infatti nel 1934 -ternato al concorso di "Vulcanologia" per l'Università di Catania e vincitore di quello per conservatore presso l'Osservatorio Vesuviano- tornò a Napoli.

Nel 1935 ebbe per incarico la direzione dell'Osservatorio Vesuviano e, insieme quella dell'Istituto di Fisica Terrestre, in seguito al collocamento a riposo dei rispettivi direttori: A. MALLADRA e G.B. RIZZO. Nel 1936, vinse il concorso di "Geofisica" e divenne titolare della cattedra e direttore ufficiale dell'Istituto, conservando però, anche la direzione dell'Osservatorio. In questa posizione è rimasto fino all'anno 1970 in cui fu collocato "fuori ruolo".

Era intervenuta però un'importante variazione, perchè qualche anno dopo la nomina di IMBO' a professore di ruolo fu stabilito per legge che il titolare della cattedra di Fisica Terrestre di Napoli fosse anche -di diritto- direttore dell'Osservatorio Vesuviano, pur rimanendo, quest'ultimo, separato e distinto dall'Università.

A questo punto, per valutare adeguatamente l'importanza ed il significato dell'opera di IMBO', occorre tratteggiare in breve la situazione della vulcanologia in Napoli, dalla metà del secolo scorso in poi.

Come è naturale Napoli, per la presenza nelle sue immediate vicinanze di un vulcano, attivo e con una storia ricca di eventi singolari e clamorosi, è stata culla della vulcanologia. Per limitarci al secolo scorso, Napoli e la sua Università vantavano in questo campo i nomi, di prestigio internazionale, di Luigi PALMIERI, fisico terrestre, e di Arcangelo SCACCHI, mineralogista, che, (ciascuno secondo la propria competenza) avevano studiato ed illustrato il Vesuvio nella sua attività e nei suoi prodotti.

Questi due scienziati usavano nei loro sopralluoghi sul Vesuvio, come punto

di appoggio, l'Osservatorio Vesuviano, fondato nel 1846 come osservatorio meteorologico collinare, che però attraversava continui periodi di decadenza e di abbandono.

Nei primi decenni di questo secolo l'Università vantava altri nomi illustri e di fama internazionale, nel campo dello studio dei nostri vulcani: quello di Ferruccio ZAMBONINI, mineralogista e chimico, continuatore dell'opera di SCACCHI, autore della splendida Mineralogia Vesuviana e quello di Giuseppe DE LORENZO, geologo, il quale però, pur non trascurando gli studi vesuviani, aveva rivolto di preferenza la sua attenzione ai vulcani estinti dell'Italia meridionale: vulcani flegrei e Vulture.

Nè si deve dimenticare Giuseppe MERCALLI, illustre sismologo e vulcanologo di stampo naturalistico, il quale fu, per diversi anni, direttore dell'Osservatorio Vesuviano, che aveva trovato, finalmente, una certa sistemazione.

Era poi cominciato - in sordina cosicché ben pochi se ne erano accorti - lo studio razionale dei prodotti piroclastici. Si trattava delle ceneri dell'eruzione del 1906 che erano studiate nell'Istituto di Chimica Agraria di Portici. Era una grossa novità nel campo della vulcanologia petrografica.

Ma - e questo è un punto fondamentale - non a Napoli soltanto si studiava il Vesuvio, nè a Napoli gli studi vulcanologici facevano tutti capo all'Università o all'Osservatorio!

Basterà citare gli studi del mineralogista francese A. LACROIX sull'eruzione del 1906 - i più importanti e completi in proposito e la famosa monografia dell'inglese H.J. JOHNSON LEWIS sul Somma-Vesuvio.

Inoltre a Napoli esisteva - e rimase in funzione fino a qualche anno prima dell'inizio dell'ultima guerra - l'Istituto Vulcanologico Internazionale fondazione privata di E. FRIEDLEANDER che, fra l'altro, pubblicava un suo apprezzato Periodico di Vulcanologia. Tra gli scienziati che vi facevano capo primeggiava un giovane svizzero, Alfredo RITTMANN, l'autore della fondamentale monografia sull'isola d'Ischia, il quale, intorno al 1932, aveva proposto una sua suggestiva teoria sulle cause dell'evoluzione magmatica del Somma-Vesuvio.

In complesso nel 1934, al rientro di IMBO' la situazione, per quanto riguarda Università e Osservatorio, degli studi vulcanologici a Napoli, anche nell'ambito ristretto degli studi vesuviani non era particolarmente brillante. Scomparsi MERCALLI, nel 1914 e ZAMBONINI del 1934 e cessata ormai la produzione geologica di DE LORENZO il contributo dell'Università e dell'Osservatorio stava riducendosi ad una "ordinaria amministrazione" e ciò era grave, trattandosi del Vesuvio.

E' chiaro dunque che la posizione di IMBO', per quanto prestigiosa, era però molto "esposta" e densa di responsabilità, a livello nazionale ed internazionale (perchè allora gli occhi dei vulcanologi di tutto il mondo erano puntati sul Vesuvio) e tale da esigere il massimo impegno, sia organizzativo / amministrativo

che scientifico.

A queste esigenze IMBO' ha corrisposto in pieno.

Per cominciare dall'impegno scientifico, premetto che le pubblicazioni di IMBO' sono molto numerose (sono circa 160, tra note, memorie e scritti vari). La sua produzione scientifica ha il pregio della continuità e ciò mostra quanto IMBO' abbia amato il proprio "mestiere". Ancora nei suoi ultimi giorni stava attendendo, pur fra le incessanti e amorevoli cure che prodigava alla moglie gravemente inferma, alla "stesura" di una importante memoria.

Tale produzione abbraccia vari campi della fisica terrestre (ottica atmosferica, radiazione solare, magnetismo, ecc.) ma riguarda specialmente sismica e vulcanismo nei loro reciproci rapporti a tutti i livelli. Non vi è stata quindi interferenza tra l'opera di RITTMANN, che fu maestro nella vulcanologia generale e nella petrografia vulcanica e quella di IMBO' che fu maestro nella fisica del vulcanismo.

Caratteristica dell'opera di IMBO' è la componente naturalistica che lo portò a limitare le sue ricerche a quei vulcani che poteva osservare da vicino e con continuità, cioè al Vesuvio, all'Etna e allo Stromboli. Solo una volta scrisse di Vulcano e mai dei vulcani esteri che pure aveva visitato e conosciuto.

Non senza ragione, secondo quanto mi faceva notare IMBO', il titolo dell'Istituto -il più antico in Italia per questa disciplina, (e ora forse non del tutto opportunamente inglobato in quello di Geologia) non era stato mai cambiato in quello, più moderno, di Geofisica ma era rimasto l'originario di Fisica Terrestre, perchè così si sottolineava il perdurare dell'apertura verso le Scienze della Terra, colla quale era stato fondato.

"Mente di fisico, anima di naturalista" questa definizione mi aveva data una volta IMBO' del "fisico terrestre" distinto, evidentemente dal "geofisico".

Riferirò ora -dopo questa premessa- le ricerche di IMBO' ed i loro risultati, per sommi capi, ricordando però che io non sono un "geofisico" e neppure un "fisico terrestre".

Possiamo cominciare dalle sue ricerche sui microsismi. In questo campo IMBO' ha trovato che una delle cause dell'agitazione microsismica è il moto ondoso ed infatti ha potuto stabilire per la costa ionica l'esistenza di un rapporto costante tra agitazione microsismica e moto ondoso. In particolare, tuttavia, IMBO' ha studiato i microsismi di origine magmatica e li ha classificati; tali ricerche hanno contribuito a fargli scoprire un'agitazione a periodo lunare semidiurno nell'attività vesuviana che rientra nel quadro dell'azione delle maree costali sull'attività vulcanica. Un'oscillazione a periodo  $1^h$  e  $\frac{1}{2}$  è stata invece riscontrata nell'attività parossistica del marzo 1944.

Lo studio della sismicità nell'area etnea e, specialmente vesuviana, gli ha permesso di costruire il modello dei basamenti dell'Etna e del Vesuvio e di sta-

bilire, per quest'ultimo, la successione e lo spessore della formazione e la profondità del focolare magmatico, confermando un'intuizione di DE LORENZO.

IMBO' seppe giovare della contemporanea disponibilità dell'Istituto e dell'Osservatorio (che si integrano a vicenda) per giungere ad un controllo geofisico del Vesuvio, un vulcano che per la sua mole non eccessiva vi si presta particolarmente bene. Così con metodi sismici e clinografici ha potuto avvertire e calcolare le variazioni della presenza del magma nel condotto vulcanico, ottenendo una specie di radiografia del vulcano in attività.

Fondamentali poi sono le sue ricerche sul rapporto tra i sismi ed i singoli atti eruttivi, cioè sulla registrazione sismografica di ciascun atto eruttivo ed il suo riconoscimento nei sismogrammi.

Così IMBO' aveva potuto seguire, sempre meglio, a misura che affinava i metodi d'indagine e di registrazione, l'attività dell'Etna, fino al 1933 e quella del Vesuvio, dal 1934 in poi, ma fu con l'eruzione del marzo 1944, da lui esattamente prevista grazie al controllo geofisico del vulcano, che egli raggiunse - dopo un decennio di continua osservazione sismo-vulcanica -, i risultati più completi, in modo che quella del 1944 è la meglio studiata tra le eruzioni vesuviane e con ricerche finalmente condotte in gran parte nella nostra Università. Tra l'altro, IMBO' ha potuto calcolare con metodi geofisici l'energia eruttiva ed il volume dei materiali eruttati.

Lo studio nell'Università di Napoli di una grande eruzione vesuviana era uno dei traguardi che IMBO' si prefiggeva. Il traguardo è stato raggiunto (nel 1906 la situazione era stata ben diversa!), ma non ci furono sviluppi, causa la cessazione dell'attività manifesta del Vesuvio.

Terminata dunque l'eruzione e subentrato al Vesuvio uno stato di quiete, IMBO' si propose di seguire -strumentalmente- quello che egli chiamava il "dinamico riposo del vulcano". A tal fine si calò anche due volte - e non era facile impresa! - sul fondo della voragine eruttiva terminale, trovandolo però del tutto freddo. Era fiducioso in una non troppo procrastinata e tranquilla ripresa, del tipo di quella che vi era stata nel 1913 dopo l'eruzione dell'aprile 1906, ma, con sua delusione, i fenomeni avvertiti al Gran Cono, dopo il marzo 1944 erano tutti di assestamento o di decrescente attività residua e solo qualche dato geofisico poteva far pensare ad una perdurante presenza magmatica in profondità.

Il programma di IMBO', tuttavia, era quello di continuare una stretta sorveglianza geofisica, perchè non sono i dati isolati che contano, ma la loro variazione.

La cessazione al Vesuvio di quell'attività vulcanica manifesta che era durata, quasi senza interruzione per tre secoli e che conferiva a Napoli quel carattere che la distingueva da tutte le altre città europee (esclusa Catania) è stata per il prestigio di Napoli un danno incalcolabile (siamo tutti, più o meno "orfani

del Vesuvio").

IMBO' era troppo intelligente per non rendersi conto che egli sarebbe stato tra i più direttamente danneggiati.

E così fu ed alla prima occasione la segreteria dell'Associazione Internazionale di Vulcanologia, che per tradizione, risiedeva a Napoli nell'Osservatorio, all'ombra del Vesuvio fumante, ed a Napoli stampava e pubblicava il suo Bollettino Vulcanologico, fu insieme alla rivista portata altrove.

IMBO', Nella vana attesa -che durò fino al suo collocamento "fuori ruolo" cioè per 25 anni- di una ripresa dell'attività vesuviana, continuò, sui sismogrammi, gli studi di quella che era stata la dinamica del vulcano (e poté forse anche maggiormente approfondirli) e seguì altri filoni di ricerca, rivolgendo la sua attenzione alle lave, o meglio alla fisica delle lave.

La produzione scientifica di IMBO' non conobbe quindi sosta. Ma non era più la stessa situazione ed IMBO' rimpiange sempre quel luminoso decennio, durante il quale aveva potuto seguire, giorno per giorno, l'incessante attività, esplosiva ed effusiva del "suo" Vesuvio!

Nel campo dunque della "fisica delle lave" IMBO' ha proposto il parametro della temperatura di irrigidimento, ottenuto, fondendo campioni di lave e lasciandoli raffreddare. Tale temperatura che è stata misurata su alcune lave etnee e su molte vesuviane ha una notevole importanza perchè permette raggruppamenti e distinzioni significative tra le lave di un medesimo vulcano ed è, presumibilmente, in relazione con la viscosità magmatica, che nel Vesuvio, a quanto sembra, è variata nel periodo storico.

L'orientazione delle linee del campo magnetico, fissato dalle lave nell'intervallo della loro consolidazione, ha permesso ad IMBO' di stabilire, mediante lave di età conosciuta, la variazione, nel periodo storico, della declinazione magnetica.

IMBO' ha pure studiato la radioattività delle lave vesuviane, relativamente molto recenti, col metodo delle lastre fotografiche, riscontrando variazioni della radioattività con l'età delle lave stesse.

Infine (ma ci sarebbe molto altro da ricordare) cito le note sulla radioattività delle acque termali di Ischia e quella sulla funzione del vapore d'acqua in alcune fumarole e sul significato della sua presenza.

Non vanno però trascurate, perchè confermano l'interessamento di IMBO' per la storia, gli scritti sull'attività politica, oltre che scientifica di Macedonio MELLONI, il primo direttore dell'Osservatorio Vesuviano e sulla storia dell'Osservatorio stesso.

Anche la produzione scientifica degli allievi è abbondante e qualificata, perchè IMBO' seppe instradare e guidare nella ricerca scientifica numerosi giovani. Ebbe la meritata soddisfazione di vedere succedergli nelle cattedre e nella di-

reazione dell'Osservatorio, valorosi allievi. Anche questo è stato un traguardo raggiunto!

L'opera di IMBO', fondata per tanta parte sulla fisica del vulcanismo non sarebbe stata possibile senza un adeguato potenziamento dell'Istituto e dell'Osservatorio, che infatti furono progressivamente attrezzati con le complesse apparecchiature occorrenti.

IMBO' ebbe sempre carissimo l'Osservatorio e, quando fu possibile (ma ciò avvenne alla fine della sua carriera) procedè alla sua ristrutturazione, col più rigoroso rispetto per la parte d'interesse storico ed artistico, arricchendolo di nuovi laboratori, in modo che, potenziato nei mezzi e nel personale non fu più l'eremitaggio scientifico, che era stato fino allora, ma un ben attrezzato istituto, con stretti legami con l'Università, ma amministrativamente, indipendente, finalizzato alla sorveglianza vulcanica e sismica. E il recente terremoto ne ha appunto dimostrato l'utilità come osservatorio sismico.

L'Osservatorio però era stato un centro efficiente anche quando era un eremitaggio e l'episodio più clamoroso è avvenuto nel 1944, quando gli Alleati che avevano requisito l'Osservatorio, lo sgombrarono precipitosamente appena iniziata l'eruzione, lasciando campo libero ad IMBO' che, coadiuvato dalla moglie, poté osservare l'eruzione direttamente e da vicino e raccogliere i dati per lo studio successivo.

IMBO' ebbe sempre molta cura per gli Annali dell'Osservatorio Vesuviano, perchè pensava che a Napoli non dovesse mancare una rivista locale di vulcanologia. E fece bene, perchè, come si è detto, l'altra rivista, il Bollettino Vulcanologico fu portato fuori Napoli.

Non mancarono ad IMBO' apprezzamenti e riconoscimenti.

Era, fra l'altro, socio dell'Accademia Gioenia di Catania, socio corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, socio ordinario dell'Accademia Pontaniana e di questa nostra, della quale fu presidente nel 1964. Dell'Accademia Pontaniana era efficientissimo segretario.

E' stato presidente della Società dei Naturalisti in Napoli, della Commissione Geodetica e della Società Geofisica Italiana. Era professore emerito nella nostra Università, medaglia d'oro dei benemeriti della cultura e dell'arte.

Quello di IMBO', dopo tanto e così impegnativo lavoro avrebbe potuto e dovuto essere un tramonto sereno; fu invece turbato innanzitutto dalla grave malattia della diletta consorte e poi da altre cause a cui dovrò accennare.

IMBO' era molto stimato ed apprezzato dai suoi colleghi geofisici, ma per alcuni motivi che qui è inutile approfondire si era delineata nei suoi confronti una certa ostilità da parte di un ristretto ambiente universitario e parauniversitario. Un attacco fu rivolto ad IMBO' nel 1966 sotto forma di aspra critica al suo Catalogo dei Vulcani Attivi Italiani, parte di un Catalogo dei Vulcani Atti-

vi nel Mondo. Il catalogo non è forse l'opera migliore di IMBO', ma questi, nel redigerlo aveva dovuto sottostare a schemi e limiti prestabiliti; si trattava, comunque, di una compilazione che non poteva certo dare la misura del valore di IMBO'. La critica, ad ogni modo non riguardava la sua figura di fisico del vulcanismo ed IMBO' rispose serenamente e pacatamente.

La polemica era rimasta nel campo scientifico, ma un altro attacco -di estrema villania- diretto contro IMBO' da un cultore straniero di vulcanologia (non RITTMANN!), mirava addirittura ad offuscarne la figura morale!

Si trattava di un parere dato dal Nostro in occasione dell'"inversione" del bradisismo puteolano nel 1970. Nel timore che sopravvenisse una grave crisi sismica, poichè il 1° marzo 1970 vi era stata una scossa, debole, ma che avrebbe potuto preludere ad altre maggiori, IMBO', con grande senso di responsabilità, aveva dato parere favorevole allo sgombero delle case fatiscenti del Rione Terra di Pozzuoli (già da tempo dichiarate pericolanti ed inagibili) e di altre nella città, nelle stesse condizioni.

Poichè però la temuta crisi sismica non si è verificata, IMBO' è stato pubblicamente accusato, nientemeno che di collusione con speculatori edilizi, miranti a demolire il vetusto e sottosviluppato, ma panoramico Rione Terra per ricostruire al suo posto un rione residenziale. Ma, come ritorsione dialettica si può rispondere che, poichè il Rione Terra non è stato demolito (è un decennio che si trova ormai in condizioni di assoluto abbandono pur avendo retto al recente sisma) si deve concludere che l'accusa è infondata.

In realtà, dato il precedente di Longarone del 1963 le precauzioni erano dovrose e legittime e non occorrevo nè giustificazioni nè difese, ma le accuse afflissero profondamente IMBO', il quale ebbe inoltre l'impressione che chi avrebbe dovuto prendere le sue parti non osasse farlo ed allora rispose egli stesso e in modo esauriente.

L'accusa era del tutto infondata, una vera calunnia, perchè la correttezza ed il disinteresse di IMBO' sono sempre stati assoluti e ben lo posso testimoniare io che ho avuto l'onore di collaborare con IMBO' nel Consiglio di Amministrazione dell'Osservatorio Vesuviano.

A queste squallide manovre ed a queste accuse che disonorano chi le ha lanciate, non avrei neppure accennato, se non avessi visto quanto l'amico IMBO' era rimasto offeso ed indignato.

Et de hoc satis!

IMBO' era l'ultimo, in ordine di età, del "gruppo di San Marcellino" delle Scienze della Terra che godeva di tanto prestigio e che comprendeva, oltre IMBO' Carmelo COLAMONICO, Giuseppe DE LORENZO, Geremia D'ERASMO, tutti isigni scienziati che onorarono grandemente la nostra Università e la nostra Accademia. IMBO' non fu da meno ed ha lasciato una traccia -che in realtà è un solco- destinata a

rimanere a lungo.

Perciò Giuseppe IMBO', questo studioso valente, tenace ed entusiasta ed insieme riservato, modesto e, forse anche un pò ingenuo deve essere ricordato con gratitudine ed ammirazione per l'alto livello cui ha saputo portare gli Istituti a Lui affidati, gli studi, in Napoli, di fisica terrestre e per i traguardi raggiunti.



M. Rigutti: Commemorazione

di Tito Nicolini

Commemorazione letta dal Socio Mario Rigutti

Adunanza del 6 Febbraio 1982

Tito Nicolini è morto il 16 marzo 1981, all'età di 82 anni, a Genova, dove era andato a vivere i suoi ultimi giorni.

Nato il 26 luglio 1899 a Pozzaglia Sabina in provincia di Rieti, visse la sua giovinezza a Roma dove frequentò le scuole dei Salesiani. Non aveva ancora compiuto il diciottesimo anno di età che, sentito il richiamo della Patria, un sentimento che per i giovani di oggi può essere abbastanza incomprensibile, ma che in quel tempo trascinò in trincea molte delle migliori vite del nostro Paese, si arruolò volontario negli Arditi e partì per la zona di operazioni nel giugno 1917. Finì il servizio militare nel marzo del 1921, ma già nel luglio del 1924 era laureato in matematica all'Università di Roma.

Cominciò la sua vita di lavoro come insegnante di matematica, nelle scuole medie. Dapprima all'Istituto industriale di Corridonia e, successivamente, all'Istituto nautico di Trieste.

Poi, nell'ottobre del 1932, entrò nel mondo dell'astronomia e fu assistente presso la Stazione astronomica di Carloforte nella quale rimase fino al febbraio del 1937. Di qui, passò all'Osservatorio di Catania, dove rimase venti mesi e, infine, all'Osservatorio di Capodimonte, metà in certo senso naturale per chi voleva occuparsi del moto dei poli terrestri, visto che a Napoli aveva sede, dal 1935, l'Ufficio Centrale del Servizio Internazionale delle Latitudini, sotto la direzione del prof. L. Carnera.

E all'osservatorio di Capodimonte rimase, percorrendo tutti i gradi della carriera, fino al 14 dicembre 1957, data in cui uscì dal ruolo degli astronomi per entrare in quello dei professori dell'Università nella quale, tuttavia, era già entrato nel 1939 come libero docente in astronomia. E in quanto, professore straordinario di astronomia della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli, il 15 dicembre 1957, rientrò, come direttore, in quello stesso Osservatorio di Capodimonte nel quale aveva lavorato come astronomo per 19 anni. Con la direzione dell'Osservatorio di Capodimonte gli venne affidata, per legge, anche la direzione dell'Osservatorio di Collurania, situato a Teramo.

Fin dai primi tempi della sua attività astronomica dovette affrontare problemi ed osservazioni connessi con l'astronomia di posizione e questa divenne, poi, di fatto, per sempre, e probabilmente per scelta, l'oggetto principale delle sue cure scientifiche attraverso lo studio di fenomeni terrestri, il complicato moto dei poli della Terra, le scale di tempo, la meccanica celeste.

Forse diceva anche di sé quando, ricordando l'opera del professor Carnera, col quale aveva lavorato per dieci anni, scriveva: "Dedito a lavori ardui ed apparentemente aridi, il Prof. Carnera sentiva tuttavia il richiamo, e direi la poesia, di questi lavori. Sentiva l'attrattiva degli sviluppi moderni conseguenti alla nuova meccanica di Poincaré e di Charlier, alla Relatività e Cosmologia, alla Fisica atomica, ma comprendeva bene che il suo compito scientifico gli era assegnato come astronomo di Osservatorio, e che quelle poche pietre che ogni studioso può apportare all'edificio della Scienza, Egli doveva portarle attraverso il lavoro assiduo e spinoso eseguito attraverso livelle, micrometri, cerchi divisi, deduzioni delle osservazioni, insidiate sottilmente da errori

mai abbastanza controllati." E, tanto per fare un esempio, il prof. Nicolini, durante il tempo passato alla stazione di Carloforte, prima stabilmente, poi con permanenze più o meno lunghe, particolarmente subito dopo la fine della guerra, nel 1946, per riattivare servizi interrotti e istruire nuove persone, osservò personalmente, circa 4500 coppie di Talcott allo strumento zenitale di Wanschaff, eseguì un numero molto grande di osservazioni complementari per le misure di tempo e di errori, e fece osservazioni di digressioni massime di circumpolari.

Con denominazione ormai entrata nell'uso, Nicolini fu dunque un astronomo classico che dedicò la sua attività di ricercatore, essenzialmente, all'acquisizione di osservazioni con le tecniche dell'astronomia posizionale, quasi caparbiamente precisa e meticolosa.

Come si direbbe oggi, la sua fu un'attività di altri tempi. E, in certo modo, lo fu infatti perché fu attività silenziosa; da una parte, sul piano mondano, lontana dai clamori di certa astronomia-spettacolo dei nostri giorni, dall'altra, sul piano scientifico, talvolta, incompresa e non pienamente valutata da colleghi superficiali -che, spesso, si sentono interessanti solo perché fanno cose che vanno di moda- o incompetenti, e tuttavia, magari, per come vanno le cose di questo mondo, influenti.

E fu attività di altri tempi perché richiese uno spirito di altri tempi, modesto, serio, e attaccamento al lavoro quotidiano, senso del dovere, resistenza alla fatica, spirito di sacrificio. Un'attività che non consente voli della fantasia, o invenzioni di teorie più o meno ardite -e più o meno effimere- ma azioni concrete, di scarse soddisfazioni intellettuali, fatte di operazioni che si ripetono monotone e diventano esasperanti se la volontà non è sorretta dalla convinzione, anzi dalla sicurezza di star facendo un lavoro di fondamentale importanza per la scienza, di star portando nella costruzione della conoscenza dell'universo un contributo sicuro, che durerà sempre, perché i dati di osservazione non "passano" mai ed è proprio su di questi che riposa ogni sapere.

Ed è un fatto che innumerevoli progressi della scienza astronomica diventata astrofisica hanno la base sulle solide fondamenta stabilite dal paziente, costante, insostituibile lavoro di tutti gli astronomi classici del passato. E di quelli del presente, dato che qui classico non sta per morto benché illustre e meraviglioso.

Il primo lavoro del prof. Nicolini risale al 1934. Pubblicato nelle Memorie della S.A.It., col titolo di "Un esempio di determinazione di latitudine (Trieste) col metodo Guarducci" proviene dall'attività e dall'atmosfera che regnava nella Stazione di Carloforte, che, inserita nel Servizio Internazionale delle Latitudini, già si era da molti anni distinta, tra le altre distribuite lungo il parallelo 39° 8', per l'elevato numero e per l'accuratezza delle osservazioni. La pubblicazione è quasi il prototipo dei lavori che seguiranno, numerosi, nei 45 anni seguenti, fino al 1979, e in essa è già tutto lo stile del prof. Nicolini, attento preciso, meticoloso, preoccupato del significato più

riposto, meno appariscente, ma fondamentale, delle cose che si fanno nella ricerca.

Non so se sia il caso di scorrere, puntualizzando significati e meriti a una a una tutte le pubblicazioni del prof. Nicolini. Io credo di no, perché stiamo ricordando il collega scomparso e non gli stiamo facendo esami. Inoltre il prof. Nicolini non ha più bisogno di esami e quelli che doveva fare li ha fatti e li ha superati tutti.

Non possiamo, tuttavia, non ricordare con particolare evidenza quello che fu il nucleo più importante del suo contributo scientifico, imperniato sul movimento dei poli terrestri e sulle problematiche a questo collegate. Rammenterò solo alcuni titoli, di quelle pubblicazioni, ma più che sufficienti ad illustrare gli scopi scientifici che aveva dato alla sua vita di studioso: Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare, del 1940; Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1892, del 1947; Caratteristiche osservate delle componenti del moto polare, del 1948; Serie oscillatorie ed autoregressione disturbata e moto polare di Chandler, del 1949; Perturbazioni e discontinuità nel moto polare, pure del 1949; Sulle variazioni delle latitudini medie annuali, del 1950; Caratteristiche del moto polare terrestre nell'intervallo 1935.1-1949.0, del 1968; The Polhody in a critical period, ancora del 1968 e, soprattutto, quei Risultati del Servizio Internazionale delle Latitudini dal 1941.06 al 1948.78, che, pubblicati nel 1970, costituiscono il X volume della serie del S.I.L., e resero noti i dati di osservazione di 50447 coppie e di 6167 gruppi completi, le riduzioni e la polodia risultante per lo stesso periodo di tempo. Infine, ricorderò anche una revisione numerica delle componenti del moto polare, che fu il suo ultimo lavoro, del 1979.

Alla morte del prof. Colacevich, il prof. Nicolini, ebbe, per incarico, la direzione dell'Osservatorio di Capodimonte, che tenne per due anni, dal 1953 al 1955. A questa direzione tornò due anni dopo, nel 1957, come titolare, e vi rimase fino alla fine del 1969, anno in cui uscì dai ruoli per aver raggiunto i limiti d'età.

Durante la sua direzione, l'Osservatorio proseguì e sviluppò il tipo di attività e di ricerche che era stato sua caratteristica da sempre, salvo la breve parentesi di cinque anni della direzione di Colacevich durante la quale era stata tentata qualche iniziativa nel campo dell'astrofisica. Rimase in piedi, di quei tentativi, solo un filone di ricerche fotometriche su variabili ad eclisse, curato dal prof. A. Fresa.

Pensò, tuttavia, Nicolini, nonostante la sua naturale predilezione per le ricerche di tipo classico, di dotare l'Osservatorio di strumentazione moderna da usare nei campi nuovi dell'astrofisica. E fece montare, al vecchio equatoriale di Dollond un filtro interferenziale di Halle per l'osservazione dei fenomeni solari cromosferici nella riga H $\alpha$  dell'idrogeno e ordinò all'Askania un telescopio di 50 cm di diametro. Ordinò anche, per questo telescopio, una cupola che avrebbe voluto installare sulla penisola sorrentina, ad Agerola, formando così una succursale dell'Osservatorio, lontana dalle troppe luci, dai fumi e dalle turbolenze atmosferiche della città, che non consentono osservazioni di tipo astrofi

sico. Non riuscì poi nell'intento a causa di varie difficoltà, tra le quali, la principale, quella dell'acquisizione del terreno, ma oggi quel telescopio è perfettamente funzionante, costantemente usato, perché dotato di un corredo elettronico che lo fa strumento di molte possibilità. E' installato nel comprensorio dell'Osservatorio di Teramo, un luogo dove il buio della notte è ancora sufficientemente profondo per permettere buone osservazioni astronomiche.

Benché, come si diceva, prevalentemente votato ai lavori dell'astronomia classica, di posizione e geodetica, il prof. Nicolini ebbe altri interessi scientifici e culturali, chiaramente indicati dalle sue pubblicazioni; problemi di fisica planetaria, di meteorologia, problemi statistici relativi all'attività solare, problemi cosmogonici, argomenti di storia della scienza. Le sue ultime pubblicazioni, del periodo in cui era professore fuori ruolo e, successivamente, professore a riposo, riguardano la storia della scienza, l'attività solare e l'osservazione delle eclissi di Sole ma anche quella "Revisione numerica delle componenti del moto polare" che fu, come già detto, il suo ultimo lavoro e che fu presentato in questa Accademia il 2 dicembre 1978, quando il prof. Nicolini era, ormai, quasi ottantenne. In esso, con uno sforzo che non deve essere costato poco, il prof. Nicolini riprese in considerazione i dati pubblicati dal Servizio Internazionale delle Latitudini dal 1900.0 in poi relativamente alle coordinate medie mensili X e Y della polodia rettificandoli ed adoperandoli per una determinazione delle componenti, annua e chandleriana, del moto polare.

Il prof. Nicolini dedicò buona parte del suo tempo anche all'insegnamento. Negli anni 1941 e 1942 svolse corsi liberi di astronomia all'università di Napoli e nel 1944 un corso di astronomia nautica all'Istituto Universitario Navale. Ancora all'Istituto Universitario Navale tenne, nel 1945, per incarico, il corso di statistica applicata alla meteorologia, negli anni 1951, 1952 e 1953 il corso di astronomia geodetica, e dal 1954 al 1967 il corso di astronomia generale e sferica. Nel 1954 e nel 1955, in seguito alla morte del prof. Colacevich, tenne per incarico, anche il corso di astronomia all'università di Napoli, corso che tenne poi ininterrottamente dal 1958 al 1969, essendo stato chiamato a ricoprire la cattedra di astronomia dell'Università. Per questo corso pubblicò un ponderoso "Compendio di Astronomia", che gli costò anni di attento lavoro e che fu pubblicato dalla Casa Editrice Liguori di Napoli.

La sua attività lo portò naturalmente a far parte di associazioni ed accademie. Ricorderò l'Unione Astronomica Internazionale, nella quale fu autorevole membro della Commissione 19, che si occupa della Rotazione della Terra, e la Società Astronomica Italiana; e ricorderò anche le due accademie napoletane, quella di Scienze Fisiche e Matematiche della Società di Scienze, Lettere ed Arti, e l'Accademia Pontaniana, che lo vollero tra i loro membri.

Dovrei aggiungere ora qualche parola, come si usa dire, sul prof. Nicolini uomo. Ma poiché un uomo è in gran parte nel suo lavoro, credo di aver già detto molte cose. Dovrei però ricordare la sua "umanità". Purtroppo, devo confessare la mia insufficienza. Con lui, infatti, non ebbi mai molti contatti. Dapprima non ci fece incontrare, se non per brevi momenti, il tipo di lavoro

- 52) "Considerazioni preliminari alla osservazione dei satelliti artificiali". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici. Vol. V, N. 8, 1960.
- 53) "Intensità fotometriche relative di alcune regioni lunari". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Osservazioni, Vol. I, N. 8, 1960.
- 54) "La evanescente atmosfera lunare". Annuario dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli, per il 1960.
- 55) "L'occultazione venusiana di Regolo del 7 luglio 1959". Annuario dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli, per il 1960.
- 56) "Satelliti artificiali. Osservazioni ed orbite". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici. Serie II, Vol. V, N. 10, 1961.
- 57) "Il passaggio di Mercurio sul disco solare il 7 novembre 1960". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Osservazioni, Vol. I, N. 11, 1961.
- 58) "Globo celeste Roll-Reinhold 1589 ed orologio antico Chlasner 1567 dell'Osservatorio di Capodimonte". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Scientifici, N.S., N. 18, 1962. (in coll.).
- 59) "La riforma del calendario". Annuario dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli, per il 1962.
- 60) "Luigi Carnera". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Scientifici, N.S., N. 23, 1963.
- 61) "Lista di osservazioni antiche classificate di macchie solari ed aurore polari". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici. Vol. V, N. 12, 1963.
- 62) "Informazioni internazionali e lingua ausiliaria". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 1, N. 24, 1965.
- 63) "Costanti astronomiche e geofisiche nel nuovo sistema I.A.U. 1964". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Vol. V, N. 19, 1967.
- 64) "Ettore L. Martin". Memorie S.A.It., Vol. 38, 253-258, 1967.
- 65) "Le regioni di Marte esplorate dal Mariner IV". Annuario Istituto Universitario Navale, Napoli 35, 1-10, 1966, Osservatorio Astronomico di Collurania, Teramo. Note e Comunicazioni, N. 42, 1967.
- 66) "Formule empiriche e commensurabilità nel sistema planetario". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. V, N. 18, 1967.
- 67) "Scissione ed ordine di grandezza del nucleo della cometa Ikeya-Seki (1965 f)". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. II, N. 4, 1967.
- 68) "The Polhody in a critical period (1941.06-1948.98)". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici. Serie II, Vol. V, N. 20, 1968.

Publicazioni del Prof. Tito NICOLINI

- 1) "Esempio di determinazione di latitudine (Trieste) col metodo del prof. Guar  
ducci". Mem. S.A.It. 8, 209-219, 1934.
- 2) "Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche".  
R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici,  
Serie II, N. 9, 1936.
- 3) "Variazioni della flessione laterale del telescopio zenitale di Carloforte".  
Mem. S.A.It. 10, 377-380. R. Stazione Astronomica di Carloforte N. 35, 1937.
- 4) "Sulla combinazione dei valori trigonometrici e spettroscopici delle paral-  
lassi stellari". Mem. S.A.It. 10, 339-346. R. Osservatorio Astrofisico di  
Catania. Contributi Astrofisici N. 37, 1937.
- 5) "Il movimento dei poli terrestri e le stazioni internazionali di latitudine".  
Coelum 7, 81-84, 1937.
- 6) "Linee fondamentali delle teorie cosmogoniche". Coelum 7, 141-149, 161-169,  
181-185, 201-205, 1937.
- 7) "Sviluppi recenti della fisica atomica ed alcune applicazioni astronomiche".  
Annuario del R. Osservatorio Astrofisico di Catania, 1938.
- 8) "Recenti manifestazioni dell'attività solare". Coelum 8, 150-151. R. Osserva  
torio Astrofisico di Catania 43, 1938.
- 9) "Indagine dell'azione solare sulla ionosfera e gli ursigrammi italiani".  
Coelum 8, 151-153, 1938.
- 10) "L'azione solare sulla ionosfera e la propagazione delle onde radioelettriche".  
R. Osservatorio Astrofisico di Catania. Contributi Astrofisici N. 46, 1938.
- 11) "Radiazione solare e periodi glaciali". Coelum 8, 81-83, 1938.
- 12) "Principi ed applicazioni elementari della fotometria stellare". Coelum 9,  
121-128, 1939.
- 13) "Il Reale Osservatorio Astronomico di Capodimonte". Contributi Astronomici,  
Napoli, Serie II, Vol. II, N. 2, 1940.
- 14) "Studio delle viti del micrometro Repsold del cerchio meridiano di Capodimon  
te". Contributi Astronomici, Napoli, Serie II, Vol. I, N. 24, 1940. (in coll.).
- 15) "L'attività del Sole nell'anno 1937". Mem. S.A.It. 13, 225-231, 1940.
- 16) "L'attività del Sole nell'anno 1938". Mem. S.A.It. 13, 249-255, 1940.
- 17) "Prospettive della ipotesi nebulare di Laplace". Contributi Astronomici, Na  
poli. Serie II, Vol. III, N. 2, 1940.
- 18) "Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare". Contributi  
Astronomici, Napoli, Serie II, vol. III, N. 1, 1940.

- 19) "Variazioni di altezza della cromosfera solare". R. Osservatorio Astronomico di Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, vol. 2, N. 5, 1941.
- 20) "Sfondi del dramma Galileiano". R. Osservatorio Astronomico di Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 2, N. 10, 1942.
- 21) "Il periodo medio dell'attività solare in relazione alle osservazioni antiche e moderne". R. Osservatorio Astronomico di Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 2, N. 7, 1942.
- 22) "Un tipo di curva a curvatura distribuita come la densità della probabilità nella legge normale". R. Osservatorio Astronomico di Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 2, N. 9, 1943.
- 23) "Caratterizzazioni statistiche della pioggia totale annua di Napoli per il periodo 1866-1925". R. Osservatorio di Capodimonte, Napoli, Contributi Geofisici, Vol. 2, N. 8, 1945.
- 24) "Il termine di Chandler nelle variazioni di livello del lago Victoria". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Geofisici, Vol. 2, N. 9, 1946.
- 25) "Quarant'anni di progresso astronomico e fisico sotto la guida di A.S. Eddington". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi fuori serie N. 10, 1946.
- 26) "Sulle variazioni di latitudine anteriori al 1890". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, N. 7, 1947.
- 27) "Caratteristiche osservate delle componenti del moto polare". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, N. 8, 1948.
- 28) "Perturbazioni e discontinuità nel moto polare". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, N. 9, 1949.
- 29) "Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, n. 10, 1949.
- 30) "Sul movimento secolare del "polo medio" e della crosta terrestre". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, N. 11, 1950.
- 31) "Sulle variazioni delle latitudini medie annuali". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. 3, N. 12, 1950.
- 32) "Indizi di corrispondenze tra fenomeni geofisici e moto polare". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi geofisici, Vol. 2, N. 10, 1950.
- 33) "Periodicità solare ed epoche di Wolf-Wolfer". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea. Vol. I, N. 4, 1952.
- 34) "Attilio Colacevich". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. I, N. 6, 1953.

- 35) "La figure de la Terre". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 1, N. 5, 1953.
- 36) "Mario Castellano". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 1, N.7, 1953.
- 37) "Gli inizi della cosmogonia moderna. Le ipotesi di Bickerton e Gifford". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 1, N. 8, 1954.
- 38) "Rotazione terrestre, sismicità e polodia". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Geofisici, Vol. 2, N. 13, 1954.
- 39) "Paolo Vocca". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 1, N. 10, 1955.
- 40) "Alcune considerazioni sulla unità e sulla scala del tempo". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Serie II, Vol. IV, N. 15, 1955.
- 41) "Elenco delle pubblicazioni del personale dell'Osservatorio dal 1913 al 1955". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli, 1955.
- 42) "Il clima di Napoli-Capodimonte, 1866-1950". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Memorie Meteorologiche, 1956.
- 43) "Osservatorio Astronomico di Capodimonte a Napoli". Ministero della Pubblica Istruzione. Roma, 1956.
- 44) "Sulla deducibilità di declinazioni da osservazioni di massime digressioni". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Serie II, Vol. IV, N. 16, 1956.
- 45) "Sulla formula delle distanze planetarie". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Scientifici, N.S., N. 6, 1957.
- 46) "La stazione astronomica dell'Osservatorio di Capodimonte ad Uccle per l'Anno Geofisico Internazionale". Rendiconti Accademia Nazionale Lincei. Cl. Sc. fis. mat. nat. 23, 254-257, 1957. (in coll.).
- 47) "La station horaire italienne A.G.I. a l'Observatoire royal de Belgique". Ciel et Terre, 74, 301-303, 1958. (in coll.).
- 48) "Orologi moderni. Rotazione terrestre e tempo". Scientia 94, 97-102, Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Scientifici, N.S., N. 15, 1959.
- 49) "Sulla posizione del Sole al tempo dell'azione del poema dantesco". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Scientifici, N.S., N. 17, 1960.
- 50) "Sulla interpretazione delle variazioni fotometriche degli asteroidi". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Vol. V, N. 6, 1960.
- 51) "Sull'approssimazione isoterica ad un modello rarefatto di atmosfera lunare". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Astronomici, Vol. V., N. 7, 1960.

profondamente diverso a cui ci dedicavamo e il fatto che vivevamo in città diverse, piuttosto lontane. Poi, quando avremmo potuto conoscerci, una serie di circostanze, in parte indipendenti dalla nostra volontà, ci ha tenuti lontani.

Tuttavia le poche occasioni di incontro, e quanto mi hanno detto di lui, quelli che lo conobbero mi fecero intuire una persona mite, anche se non dimentica di quella fierezza che in età giovanile l'aveva spinta sui campi di battaglia, e generosa, non attaccata ai beni materiali della vita e contraria a certo modo di convivere fra studiosi, che pur esiste, un po' aggressivo, un po' mafioso. Molte delle persone che lavoravano all'osservatorio gli volevano bene. Molte hanno continuato a volergliene anche quando, collocato a riposo, si era allontanato dall'ambiente scientifico.

E' morto a Genova, dove aveva qualcuno a cui era particolarmente affezionato. Ma la sua salma giace a Sant'Agata sui due Golfi, riportata qui in Campania, dove ha vissuto e lavorato per la maggior parte della sua esistenza.

- 69) "Distribuzione statistica dei totali annuali di pioggia per Napoli-Capodimonte e per 13 stazioni italiane". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Geofisici, Vol. 3, N. 2, 1968.
- 70) "Caratteristiche del moto polare terrestre nell'intervallo 1935.1-1949.0". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Contributi Geofisici, Vol. 3, N. 1, 1968.
- 71) "Vittorio Nobile". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. II, N. 5., 1968.
- 72) "Dio e l'Universo". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 2, N. 8, 1969.
- 73) "Attività recente dell'Osservatorio di Capodimonte in astronomia posizionale e geodetica". Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli. Collezione Miscellanea, Vol. 2, N. 12, 1969.
- 74) "Alcuni dati supplementari sulle variazioni della latitudine a Carloforte in funzione dell'angolo orario e della declinazione lunare". Istituto Universitario Navale, Cattedra di Astronomia Generale e Sferica, Napoli, 1969.
- 75) "Risultati del Servizio Internazionale delle Latitudini dal 1941.06 al 1948.98, Vol X". Osservatorio Astronomico di Capodimonte. Memorie Astronomiche, Vol. II, N. 4, 1970.
- 76) "Variazioni progressiva e annuale della flessione laterale del telescopio zenitale di Carloforte nell'intervallo 1900-1960". Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Soc. Nazion. Sc. Lettere e Arti, Napoli, Serie 4, Vol. 39, 155-160, Istituto Universitario Navale, Cattedra di Astronomia Generale e Sferica, Pubbl. 6, Napoli, 1972.
- 77) "Il significato della velocità della luce". Istituto Universitario Navale, Astronomia Generale e Sferica, Seminario n. 6, 1973.
- 78) "La geometria del sistema planetario all'epoca di Copernico". Istituto Universitario Navale, Astronomia Generale e sferica, Seminario n. 8, 1973.
- 79) "Il concetto di creazione da Tommaso D'Aquino alla cosmologia fisica attuale". Atti dell'Accademia Pontaniana. Nuova Serie, Vol. XXIV, 1975.
- 80) "Sull'andamento secolare dell'attività solare". Rendiconto Acc. Sc. Fis. Mat., Soc. Nazion. Sc. Lettere e Arti, Napoli, Serie IV, Vol. 43, 1976.
- 81) "Alcune norme osservative elementari per le eclissi totali di Sole". Istituto Universitario Navale, Ist. Astronomia Nautica e Navigazione. In: "Studi in onore di G. Simeon", 1978.
- 82) "Una revisione numerica delle componenti del moto polare". Rendiconto Acc. Sc. Fis. Mat., Soc. Nazion. Sc. Lettere e Arti, Napoli, Serie IV, Vol. 45, 1978.

ALCUNI TEOREMI DI SINGOLARITA' ELIMINABILI PER SOLUZIONI  
DEBOLI DI EQUAZIONI NON LINEARI QUASI-ELLIPTICHE

Nota di N. AVENA e T. DE RUVO (a Bari)\*

presentata dal socio A. Avantaggiati  
Adunanza del 6.XI.1982

SUMMARY - In this paper we obtain some theorems of removable singularities for weak solutions (not necessarily bounded) of non linear semi-elliptic equations.

RIASSUNTO - In questa nota si ottengono teoremi di singolarità eliminabili per soluzioni deboli (non necessariamente limitate) di equazioni non lineari quasi-ellittiche.

---

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue applicazioni del C.N.R.  
Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica Applicata - Facoltà di Ingegneria Via Re David, 200 - 70125 BARI -

## Introduzione

In questo lavoro generalizziamo i risultati di [1], considerando la classe di equazioni quasi-lineari (3.1) (che comprende quella da noi considerata in [1] per  $p = 2$ ).

Le dimostrazioni si ottengono ricalcando in gran parte quelle fatte per il caso ellittico; pertanto ci limitiamo soltanto a mettere in evidenza le variazioni che occorre introdurre.

La condizione sull'insieme singolare  $S$  è data imponendo  $H_d(S) < +\infty$  oppure  $M_d(S) < +\infty$  (1).

### 1. Notazioni e classi funzionali.

Nel corso di questo lavoro indicheremo con  $R^n$  lo spazio reale Euclideo ad  $n$  dimensioni di punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , con  $N$  l'insieme degli interi non negativi, con  $\Omega$  un aperto limitato di  $R^n$  e con  $S \subset \Omega$  un insieme chiuso, non vuoto di misura  $n$ -dimensionale nulla.

Se  $\alpha, \beta \in N^n$  sono multi-indici con componenti  $\alpha_i, \beta_i$  porremo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n};$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}.$$

(1) cfr n. 2

con  $D_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\alpha < \beta \quad \alpha_i < \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\alpha < \beta \quad \alpha \leq \beta \quad |\alpha| < |\beta|,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}.$$

Se  $\mathcal{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  è un'assegnata n-pla di interi positivi con

$$m = \max (m_1, m_2, \dots, m_n) = m_1,$$

$$m_n = \min (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

porremo

$$q_k = \frac{m}{m_k} \quad (k = 1, \dots, n), \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$\langle \alpha, q \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot q_i$$

e denoteremo con  $J(\mathcal{M})$  l'insieme dei numeri razionali non negativi  $k$  tali che l'equazione  $\langle \alpha, q \rangle = k$  abbia almeno una soluzione  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  con  $\alpha_i$  interi non negativi.

Sia  $\mathcal{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  un multi-indice con  $m_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

La metrica

$$(1.1) \quad d_{\mathcal{M}}(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^{m_i} \right)^{1/m}$$

si dice metrica quasi-ellittica associata al multi-indice  $q$

Si vede facilmente che la metrica

$$(1.2) \quad d_{q, \mathcal{M}}(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|^{\frac{m_i}{m}},$$

è equivalente alla metrica (1.1).

Per ogni insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$ , con  $d_{q, \mathcal{M}}(A)$  denoteremo il diametro di  $A$  nella metrica (1.2).

Se  $G$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , con  $W^{k, p}(G)$ ,  $k \in J(q, \mathcal{M})$  e  $p \geq 1$  reale, indicheremo lo spazio di Sobolev delle distribuzioni  $u$  su  $G$  tale che  $D^\alpha u \in L^p(G)$  per  $\langle \alpha, q \rangle \leq k$ , munito della norma

$$\|u\|_{W^{k, p}(G)} = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}$$

Con  $W_0^{k, p}(G)$  denoteremo la chiusura di  $C_0^\infty(G)$  in  $W^{k, p}(G)$  e porremo

$$W^k(G) = W^{k, 2}(G), \quad W_0^k(G) = W_0^{k, 2}(G).$$

Denoteremo, inoltre, con  $W_{loc}^{k, p}(G)$  lo spazio delle distribuzioni  $u$  su  $G$  tali che  $u \in W^{k, p}(G')$  per ogni aperto  $G' \subset \subset G$  ( $A, B$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \subset B \iff A'$  aperto limitato,  $\bar{A} \subset B$ ).

Per ogni  $x_0 \in \Omega \setminus S$  porremo:

$$q(x_0) = \frac{1}{2} d_{q, \mathcal{M}}(x_0, S),$$

$$\rho^q(x_0) z = (\rho^{q_1(x_0)} z_1, \rho^{q_2(x_0)} z_2, \dots, \rho^{q_n(x_0)} z_n) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

e, per ogni  $\lambda \in ]0, 1]$ ,

$$I_\lambda(x_0) = \{x \in \Omega \mid |x_i - x_{0i}| < \lambda \rho^{q_i}(x_0), i = 1, \dots, n\}, \quad I_1(x_0) = I(x_0).$$

L'insieme

$$r(x_0) = \{x \in \Omega \mid d_{\mathcal{M}}(x, x_0) < r\}$$

sarà detto sfera di centro  $x_0$  e raggio  $r$  nella metrica (1.2).

Fissato comunque  $x_0 \in \Omega \setminus S$ , per ogni insieme  $E \subseteq \Omega$  e per ogni funzione  $f(x)$ , definita su  $E$ , indicheremo con  $E^*$  l'insieme trasformato di  $E$  mediante la sostituzione

$$(1.3) \quad x - x_0 = \rho^q(x_0) (y - x_0)$$

e con  $f^*(y)$  la funzione  $f[x_0 + \rho^q(x_0) (y - x_0)]$ .

Se  $A \subseteq \Omega$  è un aperto, con  $L_s^p(A)$ ,  $s$  reale e  $1 \leq p < +\infty$ , denoteremo lo spazio delle funzioni  $u$  tali che  $\rho^s u \in L^p(A)$ , munito della norma

$$\|u\|_{p,s} = \|\rho^s u\|_{L^p(A)};$$

con  $W_s^{k,p}(A)$ ,  $k \in J(\mathcal{M})$ ,  $p \geq 1$ ,  $s$  reali, indicheremo lo spazio delle distribuzioni su  $A$  tali che  $D^\alpha u \in L^p(A)$  per  $\langle \alpha, q \rangle \leq k$ , munito della norma

$$\|u\|_{W_s^{k,p}(A)} = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq k} \|D^\alpha u\|_{p, s + \langle \alpha, q \rangle - k}$$

e porremo  $W_s^k(A) = W_s^{k,2}(A)$ .

2. Alcuni Lemmi

Sia  $S$  un compatto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $d$  un numero reale non negativo,  $d_{\mathcal{M}}$  la metrica (1.2). Per ogni  $\epsilon > 0$  sia

$$H_d^\epsilon(S, d_{\mathcal{M}}) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (d_{\mathcal{M}}(S_i))^d,$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutti i ricoprimenti numerabili  $\{S_i\}$  di  $S$  con  $d_{\mathcal{M}}(S_i) \leq \epsilon$ .

Per definizione, la misura  $d$ -dimensionale di Hausdorff di  $S$ , rispetto alla metrica  $d_{\mathcal{M}}$ , è data da

$$H_d(S, d_{\mathcal{M}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} H_d^\epsilon(S, d_{\mathcal{M}}).$$

In seguito, per brevità, si scriverà  $H_d(S)$  in luogo di  $H_d(S, d_{\mathcal{M}})$ .

Poniamo, per  $d \in [0, |q|]$  ed  $\epsilon > 0$ ,

$$M_d(S, d_{\mathcal{M}}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{d-|q|} |S_\epsilon| \quad (2).$$

In seguito, per brevità, si scriverà  $M_d(S)$  in luogo di  $M_d(S, d_{\mathcal{M}})$ .

Richiamiamo ora il seguente lemma contenuto in [2].

Lemma 2.1 - Se  $S$  è un compatto di  $\mathbb{R}^n$  e se  $M_d(S) < +\infty$  con  $0 \leq d < |q|$ ,

(2) Con  $|S_\epsilon|$  denotiamo la misura di Lebesgue dell'insieme  $S_\epsilon = \{x \mid d_{\mathcal{M}}(x, S) < \epsilon\}$ ,

con  $|q| = \sum_{i=1}^n q_i$ .

allora la funzione

$$\rho^{-\lambda}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\lambda} d(x, S)^{-\lambda}$$

è localmente sommabile in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $\lambda \in ]0, |q| - d[$

Da tale lemma si ottengono i lemmi seguenti le cui dimostrazioni sono analoghe a quelle dei lemmi 2.2 e 2.3 di [1] tenendo presente che  $M_d(S) \leq C(|q|) \Lambda_d(S)$  <sup>(3)</sup>

Lemma 2.2 - Sia  $s \subset \Omega$  un compatto tale che  $M_d(S) < +\infty$  con  $0 \leq d < |q|$ . Se  
 $u \in W_{m+s}^{m,p}(\Omega \setminus S)$  con  $p > 1$  ed  $s \in ]-m, \frac{|q|-d}{p} - m[$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , si ha  
 $u \in W^{m,\sigma}(\Omega \setminus S)$  per ogni  $\sigma \in ]1, \frac{p(|q|-d)}{p(m+s) + q - d}[$ .

Lemma 2.3 - Siano  $p > 1$ ,  $\mu > p$  due numeri reali. Se  $u \in L^\mu(\Omega \setminus S)$  e  
 $M_d(S) < +\infty$ , con  $d < |q|$ , allora  $u \in L^p_\tau(\Omega \setminus S)$  per ogni  $\tau > -\frac{(|q|-d)(\mu-p)}{p \cdot \mu}$ .

Il seguente lemma è una generalizzazione del lemma 2.4 di [1]

Lemma 2.4 - Siano  $p > 1$ ,  $p' > 1$  due numeri reali tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .  
Se  $u \in W^{m,p}(\Omega \setminus S)$  e  $H_d(S) < +\infty$ , con  $0 \leq d < |q| - mp'$ , allora  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .

(3)  $\Lambda_d(S) = \max_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim N(\epsilon) \epsilon^d$  è la misura definita nel paragrafo 2 di [1] con la variante che qui si considerano sfere  $S_\epsilon$  di raggio  $\epsilon$  nella metrica (1.2).  
 Risulta ovviamente

$$N(\epsilon) S_\epsilon(\epsilon) \subset S_\epsilon, \quad N(\epsilon) S_\epsilon(2\epsilon) \supset S_\epsilon$$

$$N(\epsilon) 2^{|q|} \epsilon^{|q|} \geq |S_\epsilon| \quad 2^{|q|} \epsilon^{d-|q|} N(\epsilon) \epsilon^{|q|} \geq \epsilon^{d-|q|} |S_\epsilon|$$

e quindi  $M_d(S) \leq C(|q|) \Lambda_d(S)$

### 3. Un teorema di regolarizzazione in spazi di Sobolev anisotropi con peso.

Sia  $N$  il numero dei multi-indici  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , con  $\langle \alpha, q \rangle \leq m$  ed  $m \geq 1$  intero. Consideriamo, per ogni  $\alpha$  tale che  $\langle \alpha, q \rangle \leq m$ , le funzioni  $g_\alpha(x, \xi)$  misurabili in  $\Omega \times \mathbb{R}^N$  che verifichino le seguenti ipotesi:

i) esista una costante  $c_1 > 0$  tale che

$$|g_\alpha(x, \xi)| \leq c_1 \left( 1 + \sum_{\langle \beta, q \rangle \leq m} |\xi_\beta| \right), \text{ per ogni } \alpha \text{ con } \langle \alpha, q \rangle \leq m$$

ii) esistano due costanti  $c_2 > 0$ ,  $c_3 \geq 0$  tali che

$$\sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} g_\alpha(x, \xi) \cdot \xi_\alpha \geq c_2 \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} |\xi|^{2\alpha} - c_3 (|f(x)|^2 + \sum_{\langle \beta, q \rangle < m} |\xi_\beta|^2)$$

per quasi ogni  $x \in \Omega$  e per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , essendo  $f(x)$  una funzione di classe  $L^2(\Omega)$ .

Posto  $\partial^m u = (D^\gamma u)$  con  $0 \leq \langle \gamma, q \rangle \leq m$ , consideriamo l'equazione

$$(3.1) \quad \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq m} \int_{\Omega} g_\alpha(x, u, \partial^m u) D^\alpha \phi \, dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S).$$

Sussiste il seguente

**TEOREMA 3.1** - Siano verificate le ipotesi i), ii) e sia  $u(x)$  una funzione di classe  $W_{loc}^m(\Omega \setminus S) \cap L_S^2(\Omega \setminus S)$  con  $s \in \mathbb{R}$ . Se  $u$  verifica l'eq. (3.1) e se

$s$  è tale che  $\rho^{\frac{\langle \alpha, q \rangle}{2} + s}(x) \in L^2(\Omega)$ , allora risulta  $u \in W_{m+s}^m(\Omega \setminus S)$  per ogni aperto  $\Omega' \subset \subset \Omega$ .

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente

Lemma 3.1 - Siano verificate le ipotesi del precedente teorema, fissato comunque  $x_0 \in \Omega \setminus S$  tale che  $\rho(x_0) \leq d_{\frac{1}{2}}(x_0, \partial \Omega)$  risulta:

$$\sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} \rho^{\langle \alpha, q \rangle - \frac{|q|}{2}}(x_0) |D^\alpha u|_{2, I_{\frac{1}{2}}(x_0)} \leq C \left( \rho^{\langle \alpha, q \rangle}(x_0) + \rho^{\langle \alpha, q \rangle - \frac{|q|}{2}}(x_0) |f|_{2, I(x_0)} + \rho^{\frac{|q|}{2}}(x_0) |u|_{2, I(x_0)} \right),$$

essendo  $C$  una costante positiva che non dipende da  $x_0$  e da  $u$ .

La dimostrazione di questo lemma si ottiene ricalcando quella del lemma 3.1 di [1].

Invero procedendo come in [1], dove ora

$$\eta(x) = \zeta(\rho^{-q}(x_0)(x - x_0)),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t}^2 &\leq c_7 (t - \tau)^{-2m} \left[ \rho^{\langle \alpha, q \rangle}(x_0) + \sum_{\gamma < \alpha} |D^\gamma u^*|_{2, Q_t}^2 + \right. \\ &+ \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t} \cdot \sum_{\gamma < \alpha} |D^\gamma u^*|_{2, Q_t} + \sum_{\langle \alpha, q \rangle < m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t} \cdot \sum_{\gamma < \alpha} |D^\gamma u^*|_{2, Q_t} + \\ &\left. + \rho^{\frac{2\langle \alpha, q \rangle}{2}}(x_0) |f^*|_{2, Q_t}^2 + \sum_{\langle \alpha, q \rangle < m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t}^2 \right]. \end{aligned}$$

analoga alla (3.9) di [1].

Da questa, applicando la (4.12) di [2] anzichè la (2.7) di [15] si ricava

$$\sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t'} < c_8 (t - \tau)^{-m} \left[ \rho^{\frac{\langle \alpha, q \rangle}{2}} (x_0) + \right. \\ \left. + \left( \sum_{\langle \alpha, q \rangle = m} |D^\alpha u^*|_{2, Q_t} \right)^{\frac{1+a_0}{2}} \cdot |u^*|_{2, Q_t}^{\frac{1-a_0}{2}} + |u^*|_{2, Q_t} + \rho^{\frac{\langle \alpha, q \rangle}{2}} (x_0) |f^*|_{2, Q_t} \right]$$

analoga alla (3.11) di [1] da cui, con le stesse considerazioni fatte in [1], segue la tesi.

Dimostrazione del teorema 3.1

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema 3.1 di [1], basta utilizzare i lemmi 4.1 e 4.2 di [14] invece dei lemmi 1.1 e 1.2 di [15].

#### 4. Singularità eliminabili

Consideriamo ora l'equazione (3.1) e facciamo la seguente ipotesi:

$$\text{iii) } |g_\alpha(x, \xi)| \leq c_1 (g(x) + \sum_{\langle \beta, q \rangle \leq m} |\xi_\beta|)$$

per ogni  $\alpha, \beta$  tali che  $\langle \alpha, q \rangle \leq m, \langle \beta, q \rangle \leq m$ , per ogni  $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N$  con

$g(x)$  funzione non negativa di classe  $L^\sigma(\Omega)$ ,  $\sigma > 1$ , essendo  $c_1$  una costante positiva.

Sussiste il seguente

**TEOREMA 4.1** - Supponiamo verificata la ipotesi iii) e sia  $u$  una funzione di classe  $W^{m,\sigma}(\Omega \setminus S)$  soddisfacente l'equazione (3.1). Se risulta  $H_d(S) < +\infty$ , con  $0 \leq d \leq |q| - m\sigma'$ ,  $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$ , allora  $u \in W^{m,\sigma}(\Omega)$  e verifica l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 4.1 in [1] tenendo presente il lemma 2.4 ed il lemma 2.4 di [2].

**TEOREMA 4.2** - Siano soddisfatte le ipotesi ii) e iii) e sia  $u(x)$  una funzione di classe  $W_{loc}^m(\Omega \setminus S) \cap L_S^2(\Omega \setminus S)$  con  $s \in [-m, \frac{|q|-d}{2} - 2m]$ .

Supponiamo  $M_d(S) < +\infty$  con  $0 \leq d < |q| - 2m$ .

Allora, se  $u(x)$  soddisfa l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S)$ , si ha  $u \in W_{loc}^m(\Omega)$  se  $s = -m$ ;  $u \in W_{loc}^{m,\sigma}(\Omega)$  per ogni  $\sigma \in ]1, \frac{2(|q|-d)}{2(m+s)+|q|-d}$  [ se

$s > -m$ . Inoltre  $u$  soddisfa l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Invero, se  $\Omega' \subset \subset \Omega$  ed  $S \subset \subset \Omega'$ , per il lemma 2.1 risulta  $\rho^s + \frac{\langle \alpha, q \rangle}{2}(x) \in L^2(\Omega' \setminus S)$  e, per il teorema 3.1, si ha  $u \in W_{S+m}^m(\Omega' \setminus S)$ . Quindi per il lemma 2.2 si ha

$u \in W^{m,\sigma}(\Omega' \setminus S)$  per ogni  $\sigma \in ]1, \frac{2(|q|-d)}{2(m+s)+|q|-d}$  [ se  $s > -m$ .

Se invece  $s = -m$  si ha subito  $u \in W_{loc}^m(\Omega \setminus S)$ . La tesi consegue allora dal teorema 4.1, tenendo presente che, a causa della (2.1) di [2],  $M_d(S) < +\infty$  impli

ca  $H_d(S) < +\infty$ .

TEOREMA 4.3 - Siano verificate le ipotesi ii) e iii) e sia  $u(x)$  una funzione di classe  $W_{loc}^m(\Omega \setminus S) \cap L^\mu(\Omega \setminus S)$  con  $\mu > \frac{|q| - d}{|q| - d - 2m}$ . Supponiamo  $M_d(S) < +\infty$  con  $d < |q| - 2m$  e che  $u$  soddisfi l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S)$ ; allora  $u \in W_{loc}^{m, \beta}(\Omega)$  per ogni  $\sigma \in ]1, \frac{\mu(|q| - d)}{|q| - d + m\mu} [$  e soddisfa l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Invero per il lemma 2.3 si ha  $u \in L_S^2(\Omega \setminus S)$  per ogni  $s > -\frac{(|q| - d)(\mu - 2)}{2\mu}$ . Dopo ciò la tesi consegue dal teorema 4.2 se  $s \in ]-\frac{(|q| - d)(\mu - 2)}{2\mu}, \frac{|q| - d}{2} - 2m [$  osservando che l'ipotesi  $\mu > \frac{|q| - d}{|q| - d - 2m}$  equivale a  $-\frac{(|q| - d)(\mu - 2)}{2\mu} < \frac{|q| - d}{2} - 2m$ .

TEOREMA 4.4 - Siano soddisfatte le ipotesi ii) e iii) e sia  $M_d(S) < +\infty$  con  $0 \leq d < |q| - 2m$ . Se  $u(x)$  è una funzione di classe  $W_{loc}^m(\Omega \setminus S) \cap L^\mu(\Omega \setminus S)$  con  $\mu > \frac{2(|q| - d)}{|q| - d - 2m}$  che soddisfi l'equazione 3.1 per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S)$ , allora  $u \in W_{loc}^m(\Omega)$  e soddisfa l'equazione (3.1) per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Invero la tesi del teorema discende subito dal teorema 4.2 osservando che, per il lemma 2.3, risulta  $u \in L_{-m}^2(\Omega \setminus S)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] N. AVENA, T. DE RUVO, Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni deboli di equazioni ellittiche quasi lineari di ordine  $2m$ . Apparirà su Ricerche di Matematica.
- [2] C. DEMICHELE, A. MATTEO, Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni deboli di equazioni fortemente quasi-ellittiche. Rend. Acc. Sci. Fis. e Mat. Napoli Serie IV, vol. XLVII 1980.
- [3] E. GIUSTI, Equazioni quasi-ellittiche e spazi  $\mathcal{L}^{p,\beta}(\Omega, \delta)$  (1), Ann. di Mat. vol. LXXX (1967).
- [4] R. HARVEY, J. POLKING, Removable singularities of solutions of linear partial equations, Act Math. 125 (1970) 39-56.
- [5] R. INFANTINO, Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni deboli di equazioni lineari a derivate parziali, Ricerche di Mat. vol. XXVIII.
- [6] J. KRAL, Removable singularities of solutions of semielliptic equations. Rend. di Mat. (4) ser. VI vol. 6 (1973) 763-783.
- [7] W. LITTMAN, Polar sets and removable singularities of partial differential equations, Ark Mat., 7 (1967) 1-9.
- [8] M. MARCUS, On removable singular sets for solutions of elliptic equations, Am. Journal Math. 90 (1968), 197-213.
- [9] V.G. MAZ'JA, Removable singularities of bounded solutions of quasilinear elliptic equations of any order, J. Soviet Math. 3, 480-492 (1975), translations from Zapiski nauch. Sem. Leningrad Otd. Math. Inst. Steklov 27, 116-130.
- [10] C. MIRANDA, Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche. Ann. di Mat., 59 (1962).

- [11] O.A. OLEINIK and G.A. IOSIF'YAN, Removable singularities on the boundary and uniqueness of solutions of boundary-value problems for second-order elliptic and parabolic equations, *Funct. Anal. Appl.* 11, 206-217 (1980) transl. from *Funkcional Analiz. Prilozenija* no. 3, 54-67 (Russian) (1977; 7b e 377. 35010).
- [12] J. SERRIN, Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Math.* 111, 247-302 (1964).
- [13] M. TROISI, Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche, *Annali di Mat.* vol. XC (1971) 331-412.
- [14] M. TROISI, Ulteriori contributi alla teoria degli spazi di Sobolev non isotropi, *Ricerche di Mat.*, Napoli (1971), 90-117.
- [15] M. TROISI, Problemi ellittici con dati singolari, *Ann. di Matem.*, 83 (1969), 363-408.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, G. Cimmino, D. Greco.

UNA COSTRUZIONE PER PARTICOLARI  $\Delta$ -SETS\*

Nota di Sara Dragotti\*\*

Presentata dal Socio Corrispondente Sandro Buoncristiano

Adunanza del 6/11/82

Riassunto

A partire dalla  $\Delta$ -applicazione  $r_q: BPD_n^q \rightarrow BPD_n^{q-1}$  - spazi classificanti rispettivamente i  $q$  ed i  $(q-1)$ -smoothings di un microfibrato su un  $\Delta$ -set - si costruisce un Kan  $\Delta$ -set  $B_{r_q}$ , una Kan fibrazione  $p_q$  ed una equivalenza di omotopia  $s_q$  tali che  $p_q \circ s_q = r_q$ .

Abstract

Starting from the  $\Delta$ -map  $r_q: BPD_n^q \rightarrow BPD_n^{q-1}$  - classifying spaces of  $q$  and  $(q-1)$ -smoothings on a microbundle over a  $\Delta$ -set - we construct a Kan  $\Delta$ -set  $B_{r_q}$  and a Kan fibration  $p_q$  and a homotopy equivalence  $s_q$  such that  $p_q \circ s_q = r_q$ .

Introduzione

In una precedente nota ([1]) si è costruita una successione di  $\Delta$ -sets Kan e  $\Delta$ -applicazioni:

$$(1) \quad BPL_n \leftarrow \dots \leftarrow BPD_n^{q-1} \xleftarrow{r_q} BPD_n^q \leftarrow BPD_n^{q+1} \leftarrow \dots$$

la cui realizzazione è, a meno di omotopia, una decomposizione di Moore-Poincaré:

$$(2) \quad BPL_n \leftarrow \dots \leftarrow B_n^{q-1} \leftarrow B_n^q \leftarrow B_n^{q+1} \leftarrow \dots$$

della fibrazione  $\Phi: BPD_n \rightarrow BPL_n$ , descrivendone i termini e stabilendo che l'esistenza di un sollevamento della funzione  $f$  classificante il microfibrato

\* Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

\*\* Istituto di Matematica "R. Caccioppoli", via Mezzocannone 8 Napoli (80134)

to tangente ad  $M$ , varietà PL senza bordo di dimensione  $n$ , al  $q$ -esimo termine della successione è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza su  $M$  di un  $q$ -smoothing, ossia di una classe di strutture differenziabili al di fuori di un sottopoliedro di  $M$  di codimensione  $q$ .

In [2] si è poi stabilito, con un teorema di classificazione, che esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di omotopia verticale dei sollevamenti a  $BPD_n^q$  della funzione classificante suddetta e le classi di concordanza di  $q$ -smoothings sul microfibrato tangente ad  $M$ .

Se ci si pone il problema di indagare sulla natura delle ostruzioni ai sollevamenti successivi di  $f$  ai vari termini della successione, sorge la difficoltà di non poter applicare la teoria classica dell'ostruzione alla torre (1) in quanto le  $r_q$  non sono fibrazioni, mentre per la torre (2), costruita a meno di omotopia usando teoremi classici, c'è la difficoltà di non conoscere i vari termini come  $\Delta$ -sets.

Per ovviare a ciò, nel presente lavoro, fissata l'attenzione su un tratto della torre (1):

$$BPD_n^q \xrightarrow{r_q} BPD_n^{q-1},$$

si costruisce (§2) un  $\Delta$ -set Kan  $B_{r_q}$ , una equivalenza di omotopia  $s_q$  di  $BPD_n^q$  in  $B_{r_q}$  (teorema 3), ed una fibrazione  $p_q$  di  $B_{r_q}$  in  $BPD_n^{q-1}$  (teorema 4) in modo che il diagramma seguente sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} BPD_n^q & & \\ r_q \downarrow & \searrow^{s_q} & \\ BPD_n^{q-1} & & B_{r_q} \\ & \nearrow_{p_q} & \end{array}$$

Per la costruzione di  $B_{r_q}$  si utilizza la nozione di  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$ , definita nel §1 per un  $\Delta$ -set generico  $X$ .

Come tutto ciò si applichi allo studio delle ostruzioni anzidette è oggetto di una nota attualmente in preparazione.

### 1. $\Delta$ -cammini di ordine $k$ .

Dato un  $\Delta$ -set  $X$ , si definisce  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $X$  una  $\Delta$ -applicazione  $\omega_k$  di  $\Delta^k \otimes I$  in  $X$ , dove  $\Delta^k$  è il semplice standard di dimensione  $k$ , ed  $I$  è l'intervallo reale unitario.  $\omega_k(\Delta^k \otimes \{0\})$  e  $\omega_k(\Delta^k \otimes \{1\})$  saranno det-

ti rispettivamente *origine* e *fine* del  $\Delta$ -cammino  $\omega_k$ .

Indichiamo con  $X^I$  il  $\Delta$ -set il cui tipico  $k$ -simpleso è un  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $X$ , e l'operatore di faccia è definito nel modo seguente:

$$\omega_h^i: \Delta^h \otimes I \longrightarrow X$$

è faccia di

$$\omega_k^i: \Delta^k \otimes I \longrightarrow X$$

se e solo se:

$$\Delta^h < \Delta^k \quad \text{e} \quad \omega_k^i / \Delta^h \otimes I = \omega_h^i.$$

Si ha il seguente:

**TEOREMA 1** - Se  $X$  è un  $\Delta$ -set Kan, anche  $X^I$  è Kan.

*dimostrazione*

Detta  $f$  una  $\Delta$ -applicazione dell' $i$ -esimo corno  $\Delta_{k,i}^k$  di  $\Delta^k$  in  $X^I$ ,  $f(\Delta_{k,i}^k)$  è una  $\Delta$ -applicazione  $g$  di  $\Delta_{k,i}^k \otimes I$  in  $X$ . Poiché  $\Delta^k \otimes I$  collassa a  $\Delta_{k,i}^k \otimes I$  (una sequenza di collassi elementari è indicata nella figura seguente per  $k=2$ ) e poiché  $X$  è Kan,  $g$  si estende ad una  $\Delta$ -applicazione  $g^i$  di  $\Delta^k \otimes I$  in  $X$ .

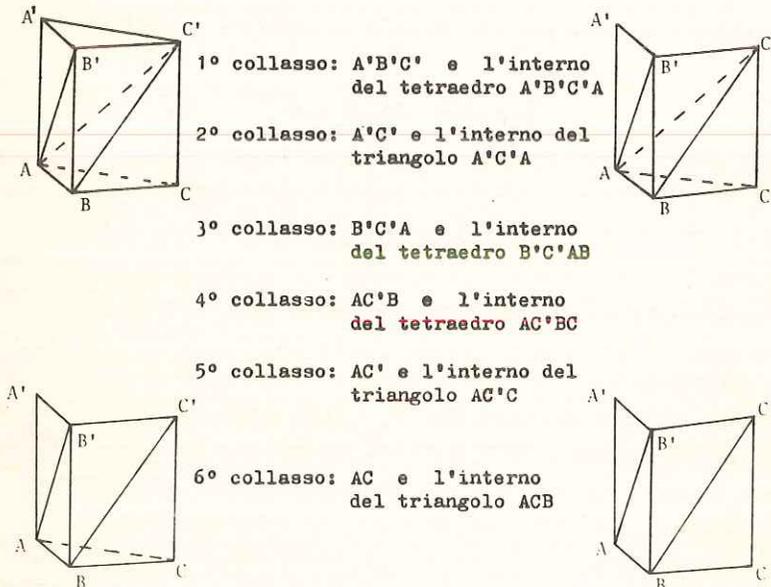


Fig. 1

Ponendo allora per ogni semplice  $\Delta^h < \Delta^k$ :

$$f^*(\Delta^h) = g^*/\Delta^h \otimes I,$$

si ottiene un'estensione di  $f$  a  $\Delta^k$ . Dunque  $X^I$  è Kan.

OSSERVAZIONE - Nella sequenza di collassi elementari indicati in fig.1 il penultimo stadio è costituito da  $\Delta_{k,i} \otimes I \cup \Delta^k \otimes \{0\}$ . Di conseguenza, nell'estendere  $g$  a  $g^*$ , si può, all'occorrenza, rispettare una estensione di  $g$  ad una base di  $\Delta^k \otimes I$ , di cui si è eventualmente in possesso.

Sia ora  $X = \text{BPD}_n^q$ . Un  $k$ -simple  $\omega_k$  di  $(\text{BPD}_n^q)^I$  determina, per definizione, un  $q$ -smoothing su un PL microfibrato  $\xi$  su  $\Delta^k \times I$ ; se  $\xi$  è un prodotto (a meno di isomorfismi lo è sempre),  $\omega_k$  determina quindi una concordanza tra due  $q$ -smoothings su un microfibrato PL su  $\Delta^k$ .

## 2. Il $\Delta$ -set $B_{r_q}$ .

Prendiamo ora in esame la  $\Delta$ -applicazione  $r_q: \text{BPD}_n^q \rightarrow \text{BPD}_n^{q-1}$  di cui in [1]. Ricordiamo che essa per  $q \geq 2$  associa al generico  $k$ -simple  $\Delta^k$

$$(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1})$$

di  $\text{BPD}_n^q$  il  $k$ -simple

$$(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1})$$

di  $\text{BPD}_n^{q-1}$ , ossia agisce "dimenticando" la struttura esistente sui  $(q-1)$ -simplessi, e come l'identità sui  $k$ -simplessi con  $k \leq q-2$ . Ricordiamo ancora che  $r_q$  non è una fibrazione.

Vogliamo costruire un  $\Delta$ -set Kan  $B_{r_q}$  ( $n$  si suppone fissato e non compare nella notazione) omotopo a  $\text{BPD}_n^q$ , ed una fibrazione  $p_q: B_{r_q} \rightarrow \text{BPD}_n^{q-1}$  tale che:  $p_q \circ s_q = r_q$  dove  $s_q: \text{BPD}_n^q \rightarrow B_{r_q}$  sia una equivalenza di omotopia.

Sia dunque  $B_{r_q}$  il  $\Delta$ -set il cui tipico  $k$ -simple è una coppia  $(\sigma_k, \omega_k)$  con  $\sigma_k$   $k$ -simple di  $\text{BPD}_n^q$  ed  $\omega_k$   $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $\text{BPD}_n^{q-1}$  avente origine in  $r_q(\sigma_k)$ . L'operatore di faccia è definito in modo naturale ponendo:

$$(\sigma_h^*, \omega_h^*) < (\sigma_k, \omega_k) \iff \sigma_h^* < \sigma_k \quad \text{e} \quad \omega_h^* < \omega_k$$

ed osservando che la condizione restrittiva sull'origine dei  $\Delta$ -cammini in questione non crea difficoltà, essendo  $r_q$  una  $\Delta$ -applicazione.

Vale il seguente:

**TEOREMA 2** - Il  $\Delta$ -set  $B_{r_q}$  è Kan.

*dimostrazione*

Sia  $f$  una  $\Delta$ -applicazione del corno  $\Delta_{k,i}$  di  $\Delta^k$  in  $B_{r_q}$ .  $f$  determina una  $\Delta$ -applicazione  $f_1$  di  $\Delta_{k,i}$  in  $BPD_n^q$ , ed una  $\Delta$ -applicazione  $f_2$  di  $\Delta_{k,i}$  in  $(BPD_n^{q-1})^I$ .  $f_1$  ed  $f_2$  sono legate dalla condizione:

$$(a) \quad r_q \circ f_1(\Delta^h) = f_2(\Delta^h)(\Delta^h \otimes \{0\})$$

per ogni simpleso  $\Delta^h$  di  $\Delta_{k,i}$ .

Ora,  $BPD_n^q$  è Kan per il teorema 3.2 di [1] e  $(BPD_n^{q-1})^I$  è Kan per il teorema citato e per il teorema 1; pertanto  $f_1$  si estende ad una  $\Delta$ -applicazione  $f_1^*$  di  $\Delta^k$  in  $BPD_n^q$ , ed  $f_2$  si estende ad una  $\Delta$ -applicazione  $f_2^*$  di  $\Delta^k$  in  $(BPD_n^{q-1})^I$ . Inoltre, tenendo conto dell'osservazione successiva al teor.1, si può fare in modo che  $f_1^*$  ed  $f_2^*$  soddisfino la condizione:

$$(b) \quad r_q \circ f_1^*(\Delta^h) = f_2^*(\Delta^h)(\Delta^h \otimes \{0\})$$

per ogni simpleso  $\Delta^h \triangleleft \Delta^k$ .

Ponendo allora:

$$f^*(\Delta^h) = (f_1^*(\Delta^h), f_2^*(\Delta^h))$$

si ottiene una  $\Delta$ -applicazione  $f^*$  di  $\Delta^k$  in  $B_{r_q}$  che estende  $f$ .

Ciò prova il teorema.

**TEOREMA 3** - I  $\Delta$ -sets  $B_{r_q}$  e  $BPD_n^q$  sono omotopi.

*dimostrazione*

Detto  $\sigma_k$  un  $k$ -simpleso di  $BPD_n^q$ :

$$\sigma_k = (\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\} \Delta_{h \leq q-1}^h \triangleleft \Delta^k)$$

indichiamo con  $\bar{\omega}_{\sigma_k}$  il  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $BPD_n^{q-1}$  che agisce come  $\Delta$ -applicazione associando ad ogni simpleso  $\Delta^h$  di  $\Delta^k \otimes I$  il simpleso di  $BPD_n^{q-1}$  in cui il microfibrato PL su  $\Delta^h$  è la restrizione di  $\xi \times I$  e gli smoothings sulle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  sono le restrizioni degli smoo-

things prodotto per  $I$  di quelli esistenti su  $\xi$  ristretto alle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  di  $\Delta^k$ .

Ogni coppia  $(\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k})$  è un  $k$ -simplexso di  $B_{r_q}$ , in quanto dalla definizione segue immediatamente che:

$$\bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_k).$$

Osserviamo esplicitamente che è anche:

$$\bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{1\}) = r_q(\sigma_k)$$

cioè ogni  $\bar{\omega}_{\sigma_k}$  è un " $\Delta$ -cappio".

Sia ora  $s_q$  la  $\Delta$ -applicazione di  $BPD_n^q$  in  $B_{r_q}$  ottenuta ponendo per ogni simplexso  $\sigma_k$  di  $BPD_n^q$ :

$$s_q(\sigma_k) = (\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k}),$$

e sia  $p_q^*$  la  $\Delta$ -applicazione di  $B_{r_q}$  in  $BPD_n^q$  ottenuta ponendo per ogni simplexso  $(\sigma_k, \omega_k)$  di  $B_{r_q}$ :

$$p_q^*(\sigma_k, \omega_k) = \sigma_k.$$

Risulta chiaramente:  $p_q^* \circ s_q = \text{id}_{BPD_n^q}$ .

Invece la  $\Delta$ -applicazione  $s_q \circ p_q^*$  è diversa dall'identità:

$$s_q \circ p_q^*(\sigma_k, \omega_k) = (\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k}).$$

Al fine di dimostrare che  $s_q \circ p_q^*$  è omotopa all'applicazione identica di  $B_{r_q}$ , occorre costruire tra esse una  $\Delta$ -omotopia  $F: B_{r_q} \otimes I \rightarrow B_{r_q}$ . Possiamo costruire  $F$  cella per cella, guardando alla suddivisione per cui una cella di  $B_{r_q} \otimes I$  è del tipo  $L_k \otimes I$ , con  $L_k = (\sigma_k, \omega_k)$  simplexso di  $B_{r_q}$ . Con semplici considerazioni sugli oggetti in questione, si vede che ciò che occorre in definitiva è costruire, per ogni simplexso  $L_k$  di  $B_{r_q}$ , una  $\Delta$ -applicazione  $\Omega_{L_k}$  di  $\Delta^k \otimes I \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  tale che:

$$(c) \quad \begin{aligned} \Omega_{L_k} / \Delta^k \otimes I \otimes \{0\} &= \omega_k \\ \Omega_{L_k} / \Delta^k \otimes I \otimes \{1\} &= \bar{\omega}_{\sigma_k}. \end{aligned}$$

Consideriamo per ciò il seguente sotto- $\Delta$ -set di  $\Delta^k \otimes I \otimes I$ :

$$J = \Delta^k \otimes I \otimes \{0\} \cup \Delta^k \otimes \{0\} \otimes I \cup \Delta^k \otimes I \otimes \{1\}$$

e la  $\Delta$ -applicazione  $\Omega'_{L_k}$  di  $J$  in  $BPD_n^{q-1}$  ottenuta incollando le seguenti  $\Delta$ -applicazioni:

$$\omega_k \quad \text{su} \quad \Delta^k \otimes I \otimes \{0\}$$

$$\bar{\omega}_{\sigma_k} \quad \text{su} \quad \Delta^k \otimes I \otimes \{1\}$$

$$\bar{\omega}_{\sigma_k} \quad \text{su} \quad \Delta^k \otimes \{0\} \otimes I.$$

L'incollamento è lecito in quanto sulle intersezioni si ha:

$$\Omega'_{L_k}(\Delta^k \otimes \{0\} \otimes \{0\}) = \omega_k(\Delta^k \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_k) = \bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{0\})$$

$$\Omega'_{L_k}(\Delta^k \otimes \{0\} \otimes \{1\}) = \bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_k) = \bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{1\})$$

Poiché  $\Delta^k \otimes I \otimes I$  collassa a  $J$ ,  $\Omega'_{L_k}$  si estende ad una applicazione  $\Omega_{L_k}$  di tutto  $\Delta^k \otimes I \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  che soddisfa per costruzione alle condizioni (c) richieste.

**TEOREMA 4** - Esiste una fibrazione  $p_q: B_{r_q} \rightarrow BPD_n^{q-1}$  tale che:

$$p_q \circ s_q = r_q.$$

*dimostrazione*

Poniamo per ogni semplice  $(\sigma_k, \omega_k)$  di  $B_{r_q}$ :

$$p_q(\sigma_k, \omega_k) = \omega_k(\Delta^k \otimes \{1\}).$$

Si verifica facilmente che  $p_q$  è una  $\Delta$ -applicazione, ed inoltre per ogni semplice  $\sigma_k$  di  $BPD_n^q$  si ha:

$$p_q \circ s_q(\sigma_k) = p_q(\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k}) = \bar{\omega}_{\sigma_k}(\Delta^k \otimes \{1\}) = r_q(\sigma_k).$$

Per provare l'asserto rimane dunque da far vedere che  $p_q$  è una fibrazione. Sia pertanto  $g$  una  $\Delta$ -applicazione di  $\Delta^1 \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  e supponiamo che essa, ristretta a  $\Delta^1 \otimes \{0\}$ , ammetta un sollevamento  $g'$  a  $B_{r_q}$  rispetto a  $p_q$ :

$$g': \Delta^1 \rightarrow B_{r_q}$$

$$p_q \circ g' = g / \Delta^1 \otimes \{0\}.$$

Posto  $g^*(\Delta^1) = (\sigma_1, \omega_1)$ , si ha perciò:

$$(d) \quad \omega_1(\Delta^1 \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_1)$$

$$(f) \quad \omega_1(\Delta^1 \otimes \{1\}) = g/\Delta^1 \otimes \{0\}.$$

Dobbiamo definire una  $\Delta$ -applicazione  $\bar{g}$  di  $\Delta^1 \otimes I$  in  $B_{r_q}$  tale che:

$$p_q \circ \bar{g} = g \quad \text{e} \quad \bar{g}/\Delta^1 \otimes \{0\} = g^*,$$

e quindi, in definitiva, una  $\Delta$ -applicazione  $u$  di  $\Delta^1 \otimes I$  in  $BPD_n^q$  e una  $\Delta$ -applicazione  $H$  di  $\Delta^1 \otimes I \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  tali che:

$$H(\Delta^1 \otimes I \otimes \{0\}) = r_q \circ u(\Delta^1 \otimes I)$$

$$H(\Delta^1 \otimes I \otimes \{1\}) = g(\Delta^1 \otimes I).$$

Ora  $g^*: \Delta^1 \rightarrow B_{r_q}$  determina una  $\Delta$ -applicazione di  $\Delta^1$  in  $BPD_n^q$ , che, poiché  $BPD_n^q$  è Kan, si estende ad una  $\Delta$ -applicazione  $u$  di  $\Delta^1 \otimes I$  in  $BPD_n^q$ .  
Si ha:

$$(r) \quad u(\Delta^1 \otimes \{0\}) = \sigma_1$$

Consideriamo poi il sotto- $\Delta$ -set  $J$  di  $\Delta^1 \otimes I \otimes I$ , di cui al teorema 3, e definiamo su di esso una  $\Delta$ -applicazione  $H'$  in  $BPD_n^{q-1}$  per incollamento delle seguenti:

$$r_q \circ u \quad \text{su} \quad \Delta^1 \otimes I \otimes \{0\}$$

$$\omega_1 \quad \text{su} \quad \Delta^1 \otimes \{0\} \otimes I$$

$$g \quad \text{su} \quad \Delta^1 \otimes I \otimes \{1\}$$

L'incollamento è lecito in quanto sulle intersezioni si ha:

$$H'(\Delta^1 \otimes \{0\} \otimes \{0\}) = r_q \circ u(\Delta^1 \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_1) = \omega_1(\Delta^1 \otimes \{0\})$$

per le condizioni (r) e (d),

$$H'(\Delta^1 \otimes \{0\} \otimes \{1\}) = g(\Delta^1 \otimes \{0\}) = \omega_1(\Delta^1 \otimes \{1\})$$

per la condizione (f).

Per le già citate proprietà di  $J$  e di  $BPD_n^{q-1}$ ,  $H'$  si estende ad una

$\Delta$ -applicazione  $H$  di  $\Delta^1 \otimes I \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  che soddisfa le condizioni richieste.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S.DRAGOTTI, R.ESPOSITO, G.MAGRO, L.PARLATO, *q-smoothings*, Ricerche di Matematica XXX, 1 (1981).
- [2] S.DRAGOTTI, *Sulle strutture differenziabili parziali di un microfibrato su una varietà PL*, in corso di stampa.
- [3] J.MILNOR, *Microbundles part 1*, Topology vol.3 (1964), supplement 1, 53-80.
- [4] C.P.ROURKE, B.J.SANDERSON,  $\Delta$ -sets I: *Homotopy theory*, Quart. J. Math. Oxford (2), 22 (1971), 321-338.
- [5] E.H.SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw Hill Inc. 1966.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci S. Buoncristiano, A. Franchetta, G. Panella.



SULLE STRUTTURE DIFFERENZIABILI PARZIALI\*  
DI UN MICROFIBRATO SU UNA VARIETA' PL

Nota di Sara Dragotti\*\*

Presentata dal Socio Corrispondente Sandro Buoncristiano

Adunanza del 6/11/82

Riassunto

Si costruisce qui un'applicazione biunivoca tra le classi di omotopia verticale dei sollevamenti della funzione classificante un PL microfibrato  $\xi$  su una varietà PL, rispetto ad opportune Kan fibrazioni, e le classi di concordanza degli smoothings "parziali" su  $\xi$ .

Abstract

In this paper a bijection is constructed between vertical homotopy classes of liftings of the map classifying a PL microbundle  $\xi$  over a PL manifold and concordance classes of "partial" smoothings over  $\xi$ . The liftings take place with respect to suitable Kan fibrations.

Introduzione

Come per la teoria degli smoothings, anche quella degli smoothings "parziali" su una varietà PL si riconduce allo studio dei sollevamenti della funzione classificante il suo microfibrato tangente rispetto ad opportune Kan fibrazioni.

L'esistenza di questo collegamento è provata nella nota [1] (teor. 3.6), di cui nel §1 si espongono per grandi linee i risultati.

Nel presente lavoro si studia la natura del legame anzidetto e si giunge a provare, come risultato finale, l'esistenza di un'applicazione biunivoca tra le classi di omotopia verticale dei sollevamenti della funzione classificante un microfibrato  $\xi$  (in particolare quello tangente) su una varietà PL e le classi di concordanza degli smoothings parziali su  $\xi$ .

Il lavoro è articolato nel modo seguente:

---

\* Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

\*\* Istituto di Matematica "R. Caccioppoli", via Mezzocannone, 8  
Napoli (80134)

Nel §1 si espongono alcune nozioni e risultati preliminari.

Nel §2 si dà la definizione di  $\Delta$ -omotopia verticale tra sollevamenti, dimostrando (teorema 2.1) come essa sia la naturale versione per  $\Delta$ -applicazioni dell'ordinaria omotopia verticale.

Nel §3 si definiscono i  $q$ -smoothings, su un microfibrato  $\xi$  su un  $\Delta$ -set  $X$ , "associati" ad un sollevamento della funzione classificante  $\xi$ , stabilendo alcune proprietà ad essi relative.

Nel §4 si definisce e si studia una certa applicazione  $\Omega_f$ , a partire dalla quale si ottiene, come risultato finale, un'applicazione biunivoca dell'insieme delle classi di omotopia verticale dei sollevamenti a  $BPD_n^q$  rispetto alla fibrazione  $g_q$  (cfr. §1) della funzione  $f$ , classificante il microfibrato  $\xi$ , sull'insieme delle classi di concordanza di  $q$ -smoothings su  $\xi$ .

### 1. Preliminari

Sia  $M$  una varietà PL senza bordo e  $TM$  il suo microfibrato tangente.

Denotiamo con il simbolo  $S^q(M)$  il Kan  $\Delta$ -set il cui tipico  $k$ -simplexso è una coppia  $(P, s)$ , con  $P$  poliedro chiuso di  $M$  di codimensione  $q$  ed  $s$  un  $k$ -simplexso del  $\Delta$ -set  $S(M-P)$  degli smoothings di  $M-P$ , e l'operatore di faccia è definito nel modo seguente:

$$(P, s) \triangleleft (P', s') \iff P = P' \text{ e } s \triangleleft s'.$$

Analogamente si può definire il Kan  $\Delta$ -set  $S^q(TM)$  assumendo come tipico  $k$ -simplexso una coppia  $(P, s)$ , con  $P$  poliedro chiuso in  $M$  di codimensione  $q$  ed  $s$  un  $k$ -simplexso di  $S(T(M-P))$ , e definendo l'operatore di faccia come in precedenza.

Un  $k$ -simplexso di  $S^q(M)$  (di  $S^q(TM)$ ) sarà detto  $(k, q)$ -smoothing di  $M$  (di  $TM$ ), in particolare per  $k=0$  si parlerà semplicemente di  $q$ -smoothing.

**TEOREMA 1.1** - I  $\Delta$ -sets  $S^q(M)$  ed  $S^q(TM)$  sono omotopi.

Denotiamo con  $BPD_n^q$  il Kan  $\Delta$ -set ottenuto assumendo come  $k$ -simplexso tipico una coppia  $(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1} \Delta^h \triangleleft \Delta^k)$  dove  $\Delta^k$  è il  $k$ -simplexso standard, e:

a)  $\xi_{\Delta^k}$  è un  $n$ -microfibrato PL su  $\Delta^k$ ;

b) per ogni simplexso  $\Delta^h$  faccia di  $\Delta^k$ , con  $h \leq q-1$ ,  $\eta_{\Delta^h}$  è un  $n$ -microfibrato

differenziabile su  $\Delta^h$  e  $f_{\Delta^h}$  è un isomorfismo PD tra  $\xi_{\Delta^k/\Delta^h}$  e  $\eta_{\Delta^h}$  definito a meno di automorfismi PL a sinistra e di automorfismi differenziabili a destra;

c) se  $\Delta^i$  è faccia di  $\Delta^h$ , risulta  $\eta_{\Delta^h/\Delta^i}$  coincidente con  $\eta_{\Delta^i}$  e  $f_{\Delta^h/\Delta^i}$  coincidente con  $f_{\Delta^i}$  a meno di automorfismi PL a sinistra e di automorfismi differenziabili a destra.

Gli operatori di faccia sono definiti per restrizione.

Consideriamo ora la Kan fibrazione  $\Phi: \text{BPD}_n \rightarrow \text{BPL}_n$  che associa ad ogni semplice di  $\text{BPD}_n$  ( $\Delta$ -set la cui realizzazione classifica le strutture differenziabili degli  $n$ -microfibrati PL su una varietà) il microfibrato dominio, semplice di  $\text{BPL}_n$  ( $\Delta$ -set la cui realizzazione classifica gli  $n$ -microfibrati PL su una varietà).

L'introduzione di  $\text{BPD}_n^q$  permette di definire una  $(q-1)$ -fattorizzazione di  $\Phi$  mediante le  $\Delta$ -applicazioni:

$$g_q: \text{BPD}_n^q \rightarrow \text{BPL}_n \quad \text{e} \quad f_q: \text{BPD}_n \rightarrow \text{BPD}_n^q$$

così definite:

$$g_q \left( \xi_{\Delta^k}, \left\{ \eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h} \right\}_{\Delta^h \prec \Delta^k} \right) = \xi_{\Delta^k}$$

$$f_q \left( \xi_{\Delta^k} \rightarrow \eta_{\Delta^k} \right) = \left( \xi_{\Delta^k}, \left\{ \eta_{\Delta^k/\Delta^h}, f_{\Delta^k/\Delta^h} \right\}_{\Delta^h \prec \Delta^k} \right).$$

Detto  $\xi$  un  $n$ -microfibrato PL su  $M$  e  $T$  una triangolazione ordinata di  $M$ , indichiamo con  $X_T$  il  $\Delta$ -set individuato da  $T$ , e con  $f_T$  la  $\Delta$ -applicazione di  $X_T$  in  $\text{BPL}_n$  che classifica il microfibrato  $\xi$  sul  $\Delta$ -set  $X_T$ . Vale il seguente:

**TEOREMA 1.2** - La  $\Delta$ -applicazione  $f_T$  ammette un sollevamento a  $\text{BPD}_n^q$  rispetto alla fibrazione  $g_q$  se e solo se il microfibrato  $\xi$  ammette un  $q$ -smoothing.

Da questo teorema e dal teorema 1.1 segue subito il:

**TEOREMA 1.3** - Una varietà PL senza bordo  $M$ , di dimensione  $n$ , ammette un  $q$ -smoothing se e solo se la funzione classificante il suo microfibrato tangente ammette un sollevamento a  $\text{BPD}_n^q$  rispetto a  $g_q$ .

Per ogni  $q \geq 1$  indichiamo con  $r_q$  la  $\Delta$ -applicazione di  $BPD_n^q$  in  $BPD_n^{q-1}$  definita ponendo  $r_1 = g_1$  e per  $q \geq 2$ :

$$r_q \left( \xi_{\Delta^k}, \left\{ \eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h} \right\}_{h \leq q-1} \Delta^h < \Delta^k \right) = \left( \xi_{\Delta^k}, \left\{ \eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h} \right\}_{h \leq q-2} \Delta^h < \Delta^k \right)$$

Si ottiene così la successione

$$\dots \xrightarrow{r_{q+1}} BPD_n^q \xrightarrow{r_q} BPD_n^{q-1} \xrightarrow{r_{q-1}} \dots \xrightarrow{r_1} BPL_n$$

la cui realizzazione è, a meno di omotopia, una fattorizzazione di Moore-Pogonnikov della fibrazione  $|\Phi|: |BPD_n| \rightarrow |BPL_n|$ .

## 2. $\Delta$ -omotopia verticale tra sollevamenti.

Siano  $M$  una PL varietà senza bordo di dimensione  $m$  e  $T$  una sua triangolazione ordinata; denotato con  $X_T$ , o semplicemente con  $X$ , il  $\Delta$ -set individuato da  $T$  (cfr. [7]), sia  $f: X \rightarrow BPL_n$  una  $\Delta$ -applicazione e  $\xi = f^*(\gamma^n)$  il pull-back dell' $n$ -microfibrato canonico  $\gamma^n$  su  $BPL_n$  tramite  $f$ . Consideriamo la  $\Delta$ -applicazione  $H_f: X \otimes I \rightarrow BPL_n$  definita ponendo per ogni semplice  $\Delta^k$  di  $X \otimes I$ :

$$H_f(\Delta^k) = \xi \times I / \Delta^k$$

Poiché  $|H_f|$  è l'omotopia costante di  $f$  classificano lo stesso microfibrato  $\xi \times I$ ,  $H_f$  risulta una  $\Delta$ -approssimazione dell'omotopia costante.

**DEFINIZIONE** Siano  $A$  e  $B$  due Kan  $\Delta$ -sets e  $G: A \rightarrow B$  una Kan fibrazione. Data una  $\Delta$ -applicazione  $h: X \rightarrow B$ , due sollevamenti  $h_1$  ed  $h_2$  di  $h$  ad  $A$  rispetto a  $G$  si dicono verticalmente omotopi se lo sono le loro realizzazioni.

**TEOREMA 2.1** - Due sollevamenti  $f_0$  ed  $f_1$  a  $BPD_n^q$  della  $\Delta$ -applicazione  $f: X \rightarrow BPL_n$  rispetto alla fibrazione  $g_q: BPD_n^q \rightarrow BPL_n$  sono verticalmente omotopi se, e solo se, esiste una  $\Delta$ -omotopia tra essi che sia un sollevamento di  $H_f$ .

*dimostrazione*

Sia  $G$  una  $\Delta$ -omotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$  che sia un sollevamento di  $H_f$ . Si ha pertanto:

$$|g_q \circ G| = |H_f| \simeq |f| \circ p_1$$

dove  $p_1$  è la proiezione sul primo fattore.

$$\begin{array}{ccc}
 |X| \times I = |X \otimes I| & \xrightarrow{|G|} & |BPD_n^q| \\
 p_1 \downarrow & \nearrow |f_1| \quad \searrow |f_0| & \downarrow g_q \\
 |X| & \xrightarrow{|f|} & |BPL_n|
 \end{array}$$

Posto  $J = |X| \times I \times \{0\} \cup |X| \times \{0\} \times I \cup |X| \times \{1\} \times I \cup |X| \times I \times \{1\} \subset |X| \times I \times I$ , consideriamo la funzione  $\bar{\psi}$  definita per incollamento delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{ll}
 |f| \circ p_1 & \text{su } |X| \times I \times \{0\} \\
 |f| \circ p_1 & \text{su } |X| \times \{0\} \times I \\
 |f| \circ p_1 & \text{su } |X| \times \{1\} \times I \\
 |g_q \circ G| & \text{su } |X| \times I \times \{1\}.
 \end{array}$$

La funzione  $\bar{\psi}$  così definita classifica il microfibrato  $\xi \times I \times I$  ristretto a  $J$ . Esiste allora una funzione  $\psi : |X| \times I \times I \rightarrow |BPL_n|$  classificante il microfibrato  $\xi \times I \times I$  che estende  $\bar{\psi}$  (cfr. [4] pag. 181).  $\psi$  è allora una omotopia tra  $|g_q \circ G|$  e  $|f| \circ p_1$  che risulta stazionaria su  $|X| \times \{0\} \times I \cup |X| \times \{1\} \times I$ . Poiché  $\psi$  ristretta a  $|X| \times I \times \{1\}$  si solleva a  $|BPD_n^q|$ , anche  $\psi$  si solleva a  $|BPD_n^q|$  ed esiste un sollevamento  $\tilde{\psi}$  stazionario su  $|X| \times \{0\} \times I \cup |X| \times \{1\} \times I$  e tale che  $\tilde{\psi}/|X| \times I \times \{1\} = |G|$  (cfr. [6]). Si ha allora che  $\tilde{\psi}/|X| \times I \times \{0\}$  è un'omotopia tra  $|f_0|$  e  $|f_1|$  che risulta verticale per costruzione.

Si è così dimostrata la sufficienza della condizione.

Sia ora  $\tilde{f}$  un sollevamento di  $f$ . Definiamo la funzione  $\tilde{H}_{\tilde{f}} : X \otimes I \rightarrow BPD_n^q$  al seguente modo: per ogni semplice  $\Delta^k \in X \otimes I$ , con  $k \leq q-1$ , consideriamo il semplice  $\bar{\Delta}^k$  di  $X$  tale che  $\Delta^k \subset \bar{\Delta}^k \otimes I \subset |X \otimes I|$ , e poniamo:

$$\tilde{H}_{\tilde{f}}(\Delta^k) = \tilde{f}(\bar{\Delta}^k) \times I/\Delta^k;$$

per ogni semplice  $\Delta^k$  di  $X \otimes I$  con  $k \geq q$  poniamo invece:

$$\tilde{H}_{\tilde{f}}(\Delta^k) = \xi \times I/\Delta^k.$$

Per costruzione  $\tilde{H}_{\tilde{f}}$  è un sollevamento di  $H_f$  che risulta essere una  $\Delta$ -omotopia tra  $\tilde{f}$  ed  $\tilde{f}$ .

Siano  $f_0$  ed  $f_1$  due sollevamenti di  $f$  verticalmente omotopi ed  $F$  una omotopia verticale tra  $|f_0|$  e  $|f_1|$ , si ha pertanto

$$|g_q| \circ F = |f| \circ p_1.$$

Sia inoltre  $F'$  una  $\Delta$ -approssimazione di  $F$  tale che  $F'/X \otimes \{0\}$  coincida con  $f_0$  ed  $F'/X \otimes \{1\}$  coincida con  $f_1$  (cfr. [7]); si ha ovviamente che  $g_q \circ F' \simeq H_F$ . Consideriamo l'insieme  $J$  strutturato in modo naturale a sotto- $\Delta$ -set di  $X \otimes I \otimes I$ , e sia  $\bar{\theta}: J \longrightarrow BPD_n$  la  $\Delta$ -applicazione ottenuta incollando le seguenti  $\Delta$ -applicazioni:

$$\begin{array}{ll} g_q \circ F' & \text{su } X \otimes I \otimes \{0\} \\ H_F & \text{su } X \otimes \{0\} \otimes I \\ H_F & \text{su } X \otimes \{1\} \otimes I \\ H_F & \text{su } X \otimes I \otimes \{1\}. \end{array}$$

$\bar{\theta}$  classifica il microfibrato  $\xi \times I \times I/J$ , e pertanto esiste un'estensione  $\theta$  di  $|\bar{\theta}|$  che classifica il microfibrato  $\xi \times I \times I$ . Sia  $\theta'$  una  $\Delta$ -approssimazione di  $\theta$  che coincide su  $J$  con  $\bar{\theta}$ . La  $\Delta$ -applicazione  $\theta'$  ristretta al  $\Delta$ -set  $J' = X \otimes I \otimes \{0\} \cup X \otimes \{0\} \otimes I \cup X \otimes \{1\} \otimes I$  ammette un sollevamento dato dall'incollamento delle  $\Delta$ -applicazioni  $F'$ ,  $\tilde{H}_{F_0}$  ed  $\tilde{H}_{F_1}$ ; poiché  $X \otimes I \otimes I$  collassa a  $J'$ , tale sollevamento si estende ad un sollevamento  $\tilde{\theta}$  di  $\theta'$ . La restrizione di  $\tilde{\theta}$  a  $X \otimes I \otimes \{1\}$  è una  $\Delta$ -omotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$  che è un sollevamento di  $H_F$ .

È ovvio che il teorema 2.1 continua a valere se si considerano sollevamenti di  $f$  a  $BPD_n$  rispetto alla fibrazione  $\phi$ .

È lecito quindi chiamare  $\Delta$ -omotopia verticale tra due sollevamenti di  $f$  una  $\Delta$ -omotopia che sia un sollevamento di  $H_F$ .

### 3. q-smoothings associati ad un sollevamento.

Sia  $f'$  un sollevamento di  $f$  a  $BPD_n^q$  rispetto alla fibrazione  $g_q$ ; per ogni  $\Delta^k \in X$  con  $k \leq q-1$ ,  $f'$  determina uno smoothing  $[f'(\Delta^k)]$  su  $\xi/\Delta^k$ . In [1] è stato dimostrato che esiste un  $q$ -smoothing  $(P, s)$  su  $\xi$  godente della proprietà:

- a)  $P$  è in posizione generale rispetto a tutti gli scheletri di  $X$ , ed  $s$  ristretto a  $\xi/\Delta^k$  coincide con  $[f'(\Delta^k)]$ .

La proprietà a) non individua un  $q$ -smoothing univocamente; diremo allora associato ad  $f$  ogni  $q$ -smoothing soddisfacente la a).

**OSSERVAZIONE 3.1** - Per ogni  $q$ -smoothing  $(P, s)$  su  $\xi$ , con  $P$  in posizione generale rispetto a tutti gli scheletri di  $X$ , esiste un sollevamento di  $f$  a cui  $(P, s)$  è associato.

Infatti, essendo  $P$  in posizione generale,  $(P, s)$  determina per restrizione uno smoothing su  $\xi/\Delta^k$  per ogni  $k \leq q-1$ , e quindi individua un sollevamento di  $f$ .

**TEOREMA 3.2** - Due  $q$ -smoothings associati ad uno stesso sollevamento sono concordanti.

*dimostrazione*

Siano  $(P, s)$  e  $(P', s')$  due  $q$ -smoothings associati ad un sollevamento  $f'$  di  $f$ . Possiamo scegliere un rappresentante per  $s$  ed uno per  $s'$  in modo tale che ristretti a  $\xi/\Delta^k$  ( $k \leq q-1$ ) coincidano con  $f'(\Delta^k)$ . Costruiamo la concordanza su  $\xi \times I$  al seguente modo: per ogni cella  $\Delta^{q-1} \times I$  di  $|X| \times I$  diamo al microfibrato  $\xi \times I/\Delta^{q-1} \times I$  la struttura prodotto per  $I$  di quella esistente su  $\xi/\Delta^{q-1}$ . Consideriamo ora una cella  $\Delta^q \times I$ , il microfibrato  $\xi \times I$  ristretto al bordo di tale cella ha una  $q$ -struttura in quanto  $\xi \times I/\Delta^q \times \{0\}$  e  $\xi \times I/\Delta^q \times \{1\}$  sono dotati di  $q$ -strutture indotte da  $(P, s)$  e da  $(P', s')$  rispettivamente, e  $\xi \times I/\Delta^q \times I$  è unione di fibrati su celle del tipo  $\Delta^{q-1} \times I$ . Detto  $V$  un punto interno a  $\Delta^q \times I$ , estendiamo cilindricamente a  $\xi/\Delta^q \times I - \{V\}$  la  $q$ -struttura costruita su  $\xi/\partial(\Delta^q \times I)$ . Assumendo come poliedro di singolarità il cono da  $V$  sulle singolarità di  $\partial(\Delta^q \times I)$ , si ha una  $q$ -struttura su  $\xi/\Delta^q \times I$ .

Procedendo in modo analogo sulle celle di dimensione maggiore di  $q$ , si ottiene la concordanza richiesta.

Il teorema ora dimostrato è premessa indispensabile per la definizione dell'applicazione  $\Omega_f$ , di cui al successivo paragrafo.

Per ulteriori considerazioni si farà uso del seguente:

**TEOREMA 3.3** - Se un  $q$ -smoothing è associato a due sollevamenti distinti di  $f$ , tali sollevamenti sono verticalmente omotopi.

*dimostrazione*

Sia  $(P, s)$  un  $q$ -smoothing associato a due sollevamenti  $f'$  ed  $f''$  di  $f$ . Esistono allora due rappresentanti di  $s$ :

$$g': \xi/|X|-P \longrightarrow \eta' \quad \text{e} \quad g'': \xi/|X|-P \longrightarrow \eta''$$

tali che per ogni  $\Delta^k \in X$  con  $k \leq q-1$  si abbia:

$$g'/\xi/\Delta^k = f'(\Delta^k) \quad \text{e} \quad g''/\xi/\Delta^k = f''(\Delta^k).$$

Triangoliamo  $|X|-P$  in modo che i simplessi dello scheletro  $X^{q-1}$  siano contenuti nella triangolazione, e denotiamo con  $X-P$  il  $\Delta$ -set associato a tale triangolazione. Sia poi  $\bar{f}$  la  $\Delta$ -applicazione, classificante il microfibrato  $\xi/X-P$ , che ad ogni semplice  $\Delta^k \in X-P$  associa  $\xi/\Delta^k$ . Per le posizioni fatte si ha che  $\bar{f}/X^{q-1} = f/X^{q-1}$ . Consideriamo la  $\Delta$ -applicazione  $\bar{f}'$  di  $X-P$  in  $BPD_n$  definita ponendo per ogni  $\Delta^k \in X-P$ :

$$\bar{f}'(\Delta^k) = \xi/\Delta^k \xrightarrow{g'} \eta'/$$

La  $\Delta$ -applicazione  $\bar{f}'$  è allora un sollevamento di  $\bar{f}$  a  $BPD_n$  rispetto alla fibrazione  $\Phi$ , e si ha che:

$$f_q \circ \bar{f}'/X^{q-1} = f'/X^{q-1}$$

(per la definizione di  $f_q$  cfr. [1]), cioè risulta commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & BPD_n \\ & \nearrow \bar{f}'/ & \downarrow f_q \\ X^{q-1} & \xrightarrow{\bar{f}/} & BPD_n^q \end{array}$$

Analogamente, a partire da  $f''$  si può definire un sollevamento  $\bar{f}''$  di  $\bar{f}$  a  $BPD_n$  rispetto alla fibrazione  $\Phi$ , tale che sia commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & BPD_n \\ & \nearrow \bar{f}''/ & \downarrow f_q \\ X^{q-1} & \xrightarrow{\bar{f}''/} & BPD_n^q \end{array}$$

Poiché  $\bar{f}'$  ed  $\bar{f}''$  individuano lo stesso smoothing su  $\xi/X-P$ , essi sono verticalmente omotopi, ossia esiste una  $\Delta$ -omotopia verticale  $F': (X-P) \otimes I \rightarrow BPD_n$  tra essi. La  $\Delta$ -applicazione  $f_q \circ F'/X^{q-1} \otimes I$  è allora una  $\Delta$ -omotopia tra  $f'/X^{q-1}$  ed  $f''/X^{q-1}$  che si può estendere ad una  $\Delta$ -omotopia verticale  $F$  tra  $f'$  ed  $f''$  associando ad ogni semplice  $\Delta^k \in X \otimes I$  con  $k \geq q$ , il PL microfibrato  $\xi \times I/\Delta^k$ .

#### 4. L'applicazione $\Omega_f$ .

Conservando le notazioni dei paragrafi precedenti, indichiamo con  $Lift^q(f)$

l'insieme dei sollevamenti di  $f$  a  $BPD_n^q$  rispetto a  $\xi_q$ , e con  $\mathcal{C}^q(\xi)$  l'insieme delle classi di concordanza dei  $q$ -smoothings su  $\xi$ .

In virtù del teorema 3.2, si ottiene un'applicazione

$$\Omega_f: \text{Lift}^q(f) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\xi)$$

facendo corrispondere ad ogni sollevamento di  $f$  la classe di concordanza dei  $q$ -smoothings ad esso associati.

Allo scopo di dimostrare la suriettività di  $\Omega_f$ , occorre il seguente:

**LEMMA 4.1** - Ogni  $q$ -smoothing su  $\xi$  è concordante ad uno il cui poliedro di singolarità è in posizione generale rispetto agli scheletri di  $X$ .

*dimostrazione*

Sia  $(P, s)$  un  $q$ -smoothing su  $\xi$ . Esiste una PL isotopia ambiente  $h: |X| \times I \rightarrow |X| \times I$  tale che  $h_1(P)$  è in posizione generale rispetto agli scheletri di  $X$  (cfr. [3]). Il microfibrato  $(h^{-1})^*(\xi \times I)$  risulta isomorfo a  $\frac{(h^{-1})^*(\xi \times I)}{|X| \times \{0\}} \times I$ , e poiché è:

$$\frac{(h^{-1})^*(\xi \times I)}{|X| \times \{0\}} = h_0^* \left( \frac{\xi \times I}{|X| \times \{0\}} \right) = \xi$$

(essendo  $h_0$  l'applicazione identica), si ha che  $(h^{-1})^*(\xi \times I)$  è isomorfo a  $\xi \times I$ . Detto  $g$  tale isomorfismo, consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \xi \times I & \xrightarrow{g} & (h^{-1})^*(\xi \times I) & \xrightarrow{\overline{h^{-1}}} & \xi \times I \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow p \\ & & |X| \times I & \xrightarrow{h^{-1}} & |X| \times I \end{array}$$

da cui, per restrizione, si ottiene la PL applicazione di microfibrati:

$$\begin{array}{ccc} \xi \times I / & \xrightarrow{\overline{h^{-1}} \circ g} & \xi \times I / \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ |X| \times I - h(P \times I) & \longrightarrow & |X| \times I - P \times I \end{array}$$

Detto  $\varphi: \xi/X-P \rightarrow \eta$  un rappresentante di  $s$ , l'applicazione PD data da:

$$\frac{\xi \times I}{|X| \times I - h(P \times I)} \xrightarrow{\overline{h^{-1}} \circ g} \frac{\xi \times I}{|X| \times I - P \times I} \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} \eta \times I$$

individua un  $q$ -smoothing su  $\xi \times I$  che su  $\xi \times I / |X| \times \{0\}$  coincide con  $(P, s)$ , men

tre su  $\xi \times I / |X| \times \{1\}$  è un  $q$ -smoothing il cui poliedro di singolarità è in posizione generale rispetto agli scheletri di  $X$ .

Dal lemma precedente, tenendo conto dell'osservazione 3.1, segue subito il

TEOREMA 4.2 - L'applicazione  $\Omega_f$  è suriettiva.

$\Omega_f$  non è invece iniettiva. Sussiste infatti il seguente:

TEOREMA 4.3 - L'applicazione  $\Omega_f$  assume lo stesso valore su sollevamenti verticalmente omotopi.

*dimostrazione*

Siano  $f'$  ed  $f''$  due elementi di  $\text{Lift}^q(f)$  verticalmente omotopi, e sia  $F$  una  $\Delta$ -omotopia verticale tra essi. La  $\Delta$ -applicazione  $F: X \otimes I \rightarrow \text{BPD}_n^q$  è per definizione un elemento di  $\text{Lift}^q(H_f)$ . Considerata l'applicazione

$$\Omega_{H_f}: \text{Lift}^q(H_f) \rightarrow \mathcal{C}^q(\xi \times I),$$

ogni elemento di  $\Omega_{H_f}(F)$  è, ovviamente, un  $q$ -smoothing su  $\xi \times I$  che, ristretto a  $\xi \times I / X \otimes \{0\}$  dà un  $q$ -smoothing associato ad  $f'$ , e ristretto a  $\xi \times I / X \otimes \{1\}$  costituisce invece un  $q$ -smoothing associato ad  $f''$ .

Il teorema precedente si inverte nel seguente:

TEOREMA 4.4 - Due sollevamenti  $f'$  ed  $f''$  di  $f$  a  $\text{BPD}_n^q$  aventi la stessa immagine secondo  $\Omega_f$  sono verticalmente omotopi.

*dimostrazione*

Siano  $(P, s)$  e  $(P', s')$  due  $q$ -smoothings associati ad  $f'$  e ad  $f''$  rispettivamente, e sia  $(\bar{P}, \bar{s})$  una concordanza tra essi, la cui esistenza è assicurata dall'ipotesi dell'enunciato. Per il lemma 4.1, enunciato in versione relativa, possiamo ritenere  $\bar{P}$  in posizione generale rispetto agli scheletri di  $X \otimes I$ . Per l'osservazione 3.1 esiste allora un sollevamento  $\bar{H}_f$  a  $\text{BPD}_n^q$  di  $H_f$  (funzione classificante il microfibrato  $\xi \times I$ ) a cui  $(\bar{P}, \bar{s})$  è associato. La  $\Delta$ -applicazione  $\bar{H}_f$  risulta allora una  $\Delta$ -omotopia verticale tra due sollevamenti di  $f$  individuanti sul microfibrato  $\xi \times I$ , ristretto alle basi di  $X \otimes I$ , i  $q$ -smoothings  $(P, s)$  e  $(P', s')$  rispettivamente. Per il teorema 3.3 esiste allora una  $\Delta$ -omotopia verticale  $F'$  tra  $f'$  ed  $\bar{H}_f / X \otimes \{0\}$ , ed una  $\Delta$ -omotopia

verticale tra  $\bar{H}_p/X \otimes \{1\}$  ed  $f''$ . Incollando le tre  $\Delta$ -omotopie verticali suddette, si ottiene allora, come volevasi dimostrare, una  $\Delta$ -omotopia verticale tra  $f'$  ed  $f''$ .

I teoremi stabiliti permettono di affermare che l'applicazione  $\Omega_f$  determina una funzione biettiva tra le classi di omotopia verticale dei sollevamenti di  $f$  a  $BPD_n^q$  e le classi di concordanza di  $q$ -smoothings sul microfibrato  $\xi$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S.DRAGOTTI, R.ESPOSITO, G.MAGRO, L. PARLATO, *q-smoothings*, *Ricerche di Matematica* XXX, 1 (1981).
- [2] M.W.HIRSCH, B.MAZUR, *Smoothings of PL manifolds*, *Annals of Math. Studies* 80, Princeton Univ. Press, 1974.
- [3] J.F.P.HUDSON, *Piecewise linear topology*, W.A.Benjamin Inc. 1969.
- [4] R.KIRBY, L.SIEBENMANN, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Princeton, 1977.
- [5] J.MILNOR, *Microbundles part 1*, *Topology* vol.3 (1964), supplement 1, 53-80.
- [6] R.PORTER, *Introduction to fibre bundles*, *Lecture notes in Pure and Appl. Math.*, 31.
- [7] C.P.ROURKE, B.J.SANDERSON,  $\Delta$ -sets I: *Homotopy theory*, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 22 (1971), 321-338.
- [8] C.P.ROURKE, B.J.SANDERSON, *Introduction to PL topology*, *Ergebnisse Math.*, band 69, Springer-Verlag, 1972.
- [9] C.P.ROURKE, *On structure theorem*, Preprint, Univ. Warwick, 1972.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci S. Buoncristiano, A. Franchetta, G. Panella



SULL'ISOMORFISMO DI H-ANELLI DOTATI DI  
UN MODULO IRRIDUCIBILE E QUASI FEDELE

Nota di Laura Bader (\*)

presentata dal socio prof. Mario Curzio

Adunanza del 6/11/1982

Riassunto: Utilizzando i modelli forniti da A. Caggegi [4] e L. Bader, A. Franchetta [2], si ottengono condizioni caratteristiche per l'isomorfismo di H-anelli dotati di un modulo irriducibile e quasi fedele.

Abstract: By using the classifications given by A. Caggegi [4] and L. Bader, A. Franchetta [2], we state some isomorphism theorems for primitive and quasi primitive Hestenes ternary rings.

Un anello ternario di Hestenes (H-anello) dotato di un modulo irriducibile e quasi fedele risulta quasi primitivo o primitivo, a seconda che possieda ideali bilateri effettivi o ne sia privo; tali H-anelli sono stati recentemente studiati rispettivamente da me con A. Franchetta e da A. Caggegi. Più precisamente, in [2] A. Franchetta ed io abbiamo fornito teoremi di struttura per H-anelli quasi primitivi, soffermandoci particolarmente su quelli che sono dotati di ideale destro (e sinistro) minimale e, quindi, generalizzando i risultati di L. Profera [6], mentre in [4] A. Caggegi ha classificato gli H-anelli primitivi dotati di ideale destro (e sinistro) minimale, pervenendo ad una generalizzazione dei risultati di F. Bartolozzi e G. Panella [3].

In questa Nota fornisco condizioni caratteristiche per l'isomorfismo di H-anelli primitivi o quasi primitivi dotati di ideale destro (e sinistro) minimale, ritrovando, come caso particolare, i teoremi 1 e 2 di [1]. Perciò, al n. 1 stabilisco quanto dovuto per H-anelli che siano quasi primitivi, dotati di ideale destro (e sinistro) minimale e semplici, al n. 2 ottengo le condizioni volute per H-anelli primitivi, con ideale destro (e sinistro) minimale e semplici, ed infine, al n. 3, affronto il problema in generale. Si noti

---

(\*) Indirizzo: Istituto Matematico "Renato Caccioppoli", via Mezzocannone 8,  
80134 Napoli.

Lavoro svolto nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

che un H-anello quasi primitivo non è mai isomorfo ad un H-anello primitivo, poichè il primo possiede ideali bilateri effettivi ed il secondo ne è privo.

I richiami essenziali per il seguito saranno esposti all'inizio dei nn. 1 e 2, anche allo scopo di fissare le locuzioni ed il simbolismo.

1. Isomorfismo di H-anelli semplici, con ideali bilateri effettivi e ideale destro (e sinistro) minimale.

Per le definizioni si rimanda al n. 1 di [2], ove si è stabilito ([2], teorema 2) che tutti e soli gli H-anelli quasi primitivi con ideale destro (e sinistro) minimale si ottengono, a meno di isomorfismi, con la seguente costruzione :

siano  $k$  un corpo (non necessariamente commutativo),  $W$  e  $V$   $k$ -spazi vettoriali sinistri non nulli,  $Y$  e  $X$   $k$ -spazi vettoriali destri,  $\beta : W \times Y \rightarrow k$  e  $b : V \times X \rightarrow k$  forme bilineari non degeneri. Tali dati definiscono la  $Y$ -topologia di  $W$ , la  $X$ -topologia di  $V$ , e individuano  $\lambda_1 = \{p \in \text{Hom}_k(W, V) \mid p \text{ è continua}\}$  e  $\phi_1 = \{p \in \text{Hom}_k(W, V) \mid p \text{ è continua e di rango finito}\}$ , che sono sottogruppi densi rispetto alla topologia finita di  $\text{Hom}_k(W, V)$ ,  $\lambda_2 = \{q \in \text{Hom}_k(V, W) \mid q \text{ è continua}\}$  e  $\phi_2 = \{q \in \text{Hom}_k(V, W) \mid q \text{ è continua e di rango finito}\}$ , che sono sottogruppi densi rispetto alla topologia finita di  $\text{Hom}_k(V, W)$ . Se  $L_C$  è la somma diretta di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , posto  $L_1 = \{(p, q) \in L_C \mid q = 0\}$  e  $L_2 = \{(p, q) \in L_C \mid p = 0\}$ , si ha  $L_C = L_1 \oplus L_2$  e tale gruppo additivo acquista struttura di H-anello con l'operazione ternaria  $L_C \times L_C \times L_C \rightarrow L_C$ ,  $((p_1, q_1)(p_2, q_2)(p_3, q_3)) \rightarrow (p_3 q_2 p_1, q_1 p_2 q_3)$ ; inoltre, se  $F_C$  è la somma diretta di  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e si pone  $F_1 = F_C \cap L_1$ ,  $F_2 = F_C \cap L_2$ , risulta  $F_C = F_1 \oplus F_2$  e  $F_C$  è sottoH-anello di  $L_C$  che descrive la classe degli H-anelli semplici, con ideali bilateri effettivi e ideale destro (e sinistro) minimale. Infine, se  $R$  è un H-anello per cui

$$(1) \quad F_C \subseteq R \subseteq L_C$$

(inclusione di H-anelli),  $R$  risulta quasi primitivo e possiede ideale destro (e sinistro) minimale; anzi, la condizione (1) individua, a meno di isomorfismi, gli H-anelli  $R$  che sono quasi primitivi e possiedono ideale destro (e sinistro) minimale.

Conglobiamo i dati precisati nelle scritture  $F_C = F_1 \oplus F_2 = F_C(k, \beta : W \times Y \rightarrow k, b : V \times X \rightarrow k)$  e  $L_C = L_1 \oplus L_2 = L_C(k, \beta : W \times Y \rightarrow k, b : V \times X \rightarrow k)$ .

Per agevolare la dimostrazione del teorema 1, si premettono due lemmi.

Lemma 1. Per l'H-anello  $F_C = F_1 \oplus F_2 = F_C(k, \beta : W \times Y \rightarrow k, b : V \times X \rightarrow k)$  sono valide le seguenti affermazioni :

1)  $F_C$  possiede esattamente due ideali bilateri effettivi che coincidono

con  $F_1$  e  $F_2$ .

2)  $S$  è ideale sinistro minimale di  $F_C$  contenuto in  $F_1$  se e solo se esiste  $y \in Y - \{0\}$  in modo che, con  $H = \langle y \rangle^\perp = \{w \in W \mid \beta(w, y) = 0\}$  iperpiano di  $W$ , si abbia  $S = \{(p, 0) \mid p \in \text{Hom}_k(W, V), H_p = \{0\}\}$ .

3)  $D$  è ideale destro minimale di  $F_C$  contenuto in  $F_2$  se e solo se esiste  $x \in X - \{0\}$  in modo che, con  $U = \langle x \rangle^\perp = \{v \in V \mid b(v, x) = 0\}$  iperpiano di  $V$ , si abbia  $D = \{(0, q) \mid q \in \text{Hom}_k(V, W), U_q = \{0\}\}$ .

Dimostrazione. 1) Si verifica immediatamente che  $F_1$  e  $F_2$  sono ideali bilateri effettivi di  $F_C$ , ed il lemma 7 di [2] garantisce che  $F_C$  possiede esattamente due ideali bilateri effettivi.

2) Con  $y \in Y - \{0\}$ , si consideri  $H = \langle y \rangle^\perp = \{w \in W \mid \beta(w, y) = 0\}$ , che è iperpiano di  $W$  poichè  $\beta$  è non degenerare, e si ponga  $S = \{(p, 0) \in F_C \mid H_p = \{0\}\}$ . E'  $S \neq \{0\}$ , in quanto, fissato  $v \in V - \{0\}$ , l'applicazione lineare  $W \rightarrow V$ ,  $w \mapsto \beta(w, y)v$ , è elemento di  $\phi_1$  ed ha nucleo  $H$ .  $S$  è ideale sinistro di  $F_C$  e, se  $(r, 0)$  è un qualunque suo elemento non nullo e  $t \in \text{Hom}_k(W, V)$  con  $H_t = \{0\}$ , scelto  $w \in W - H$ , dovrà risultare  $wr = v_1 \neq 0$ ,  $wt = v_2$ ; siano  $q \in \phi_2$ ,  $h \in \phi_1$  tali che  $v_1q = w$ ,  $wh = v_2$ : si ha  $(0, q), (h, 0) \in F_C$ ,  $wrqh = v_2 = wt$ , da cui  $(h, 0)(0, q)(r, 0) = (rqh, 0) = (t, 0) \in S$  poichè  $(r, 0) \in S$  e, quindi, si prova  $S = \{(p, 0) \mid p \in \text{Hom}_k(W, V), H_p = \{0\}\}$  e la minimalità di  $S$ . Siano, infine,  $\Sigma$  un ideale sinistro minimale di  $F_C$ ,  $\Sigma \subseteq F_1$ , e  $(p, 0)$  un elemento non nullo di  $\Sigma$ .  $\text{Ker } p$  risulta un iperpiano di  $W$ ; infatti, nell'ipotesi  $\text{ker } p \oplus \langle w_1 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle \subseteq W$  con  $w_1, w_2 \in W - \{0\}$ ,  $w_1p$  e  $w_2p$  sono vettori di  $V$  linearmente indipendenti, quindi esiste  $q \in \phi_2$  tale che  $w_1pq = 0$  e  $w_2pq = w_2$ ; si ha  $(p, 0)(0, q)(p, 0) = (pqp, 0) \in \Sigma$ ,  $w_1pqp = 0$ ,  $w_2pqp = w_2p$  e l'insieme  $\{(r, 0) \in \Sigma \mid (\text{ker } p \oplus \langle w_1 \rangle)r = \{0\}\}$  è ideale sinistro non nullo di  $F_C$  contenuto propriamente in  $\Sigma$ . L'applicazione lineare  $p: W \rightarrow V$  è continua e di rango finito 1, quindi esistono ([2]; pag. 423)  $v \in V - \{0\}$  e  $y \in Y - \{0\}$  tali che  $wp = \beta(w, y)v$  per ogni  $w \in W$ , e l'iperpiano  $H = \langle y \rangle^\perp = \{w \in W \mid \beta(w, y) = 0\}$  individua, per quanto già provato, l'ideale sinistro minimale di  $F_C$   $S = \{(r, 0) \mid r \in \text{Hom}_k(W, V), H_r = \{0\}\}$ . Essendo  $(0, 0) \neq (p, 0) \in \Sigma \cap S$ , per la minimalità di  $\Sigma$  e di  $S$ , si ha  $\Sigma = S$ .

3) Analoga a 2).

Lemma 2. Siano  $S \subseteq F_1$ , risp.  $D \subseteq F_2$ , un ideale sinistro, risp. destro, minimale dell'H-anello  $F_C = F_1 \circ F_2 = F_C(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k)$ . In tali condizioni:

1) siano  $s \in S$  e  $d \in D$  per i quali risulti  $xds = x$  quando  $x \in S$ ,  $dsy = y$  quando  $y \in D$ ; allora  $k_1 = sdS$  e  $k_2 = Dsd$ , sottogruppi del gruppo additivo sostegno di  $F_C$ , acquistano struttura di corpo  $k_1(+, \perp)$ ,  $k_2(+, \top)$  ponendo  $a \perp b = adb$  se  $a, b \in k_1$ ,  $a \top b = asb$  se  $a, b \in k_2$ . Inoltre, esistono

$s \in S$  e  $d \in D$  che realizzano quanto precisato;

2)  $S, D, s, d$ , e le condizioni enunciate in 1) consentono di definire un antiisomorfismo di corpi  $\tau_1: k_1 \rightarrow k$  ed un isomorfismo di corpi  $\tau_2: k_2 \rightarrow k$ . Il gruppo additivo sostegno di  $S$ , risp.  $D$ , è strutturato a  $k_2$ -spazio vettoriale sinistro mediante l'applicazione  $k_2 \times S \rightarrow S, (a, x) \rightarrow xas$ , risp.  $k_2 \times D \rightarrow D, (b, y) \rightarrow d(b\tau_2\tau_1^{-1})y$ ;

3) realizzata la situazione descritta in 2), si può definire un'applicazione biettiva  $\sigma_1: S \rightarrow V$ , risp.  $\rho_1: D \rightarrow W$ , che risulta  $\tau_2$ -semilineare.

Dimostrazione. 1) Ovviamente, per ogni  $s \in S$  e  $d \in D$ ,  $k_1(+, \perp)$  e  $k_2(+, T)$  sono anelli (binari, associativi). Se  $xds = x$  per ogni  $x \in S$ ,  $k_1(+, \perp)$  ha  $sds = s \neq 0$  come identità; inoltre, con  $a \in k_1 - \{0\}$ , è  $S1a \neq \{0\}$  poichè  $sda = a$ , e  $S1a$  è ideale sinistro di  $F_C$ ,  $S1a \subseteq S$ , quindi  $S1a = S$  per la minimalità di  $S$ ; esiste allora  $b \in S$  per cui  $bda = s$ , dunque  $sd(bda) = s$  e  $a'1a = s$  con  $a' = sdb \in k_1$ . Analogamente si prova che, se  $dsy = y$  per ogni  $y \in D$ ,  $Dsd = k_2 = k_2(+, T)$  è un corpo con identità  $d = dsd$ . Si perviene all'esistenza di  $s \in S$  e  $d \in D$  che realizzano quanto dovuto ragionando come nel lemma 3 di [6].

2) Per il lemma 1, è  $S = \{(p, o) \mid p \in \text{Hom}_k(W, V), H_p = \{o\}\}$ ,  $D = \{(o, q) \mid q \in \text{Hom}_k(V, W), U_q = \{o\}\}$ , con  $H$  opportuno iperpiano di  $W$  e  $U$  opportuno iperpiano di  $V$ . Si ponga  $s = (f, o) \in S$ ,  $d = (o, g) \in D$ ; se  $z \in W - H$ , è  $o \neq zf = \bar{v}$  e  $\bar{v}g = \alpha z + x$  con  $\alpha \in k$  e  $x \in H$ ; essendo  $fgf = f$ , si ha  $\bar{v} = zf = zfgf = \alpha\bar{v}$ , ossia  $\alpha = 1$ , che comporta  $\bar{v} \in V - U$  e, se  $\bar{w} = z + x$ , è  $\bar{w} \in W - H$ ,  $\bar{v} \in V - U$  con  $\bar{w}f = \bar{v}$ ,  $\bar{v}g = \bar{w}$ . Sia  $(p, o) \in k_1$ , risulta  $(p, o) = (f, o)(o, g)(h, o) = (hgf, o)$  per  $(h, o) \in S$  opportuno, quindi  $H_p = \{o\}$ ,  $\bar{w}p = \bar{w}hgf = \alpha\bar{v}$ , e  $\alpha \in k$  è individuato da  $(p, o)$ ; si definisce così l'applicazione  $\tau_1: k_1 \rightarrow k, (p, o) \rightarrow \alpha$ , determinata dai dati  $S, D, s, d, \bar{w}, \bar{v}$ . Se  $(p_1, o) \neq (p_2, o)$  con  $(p_1, o), (p_2, o) \in k_1$ , si ha  $\bar{w}p_1 \neq \bar{w}p_2$ , perciò  $(p_1, o)\tau_1 \neq (p_2, o)\tau_1$ ; per ogni  $\lambda \in k$ , scelta  $p \in \text{Hom}_k(W, V)$  tale che  $H_p = \{o\}$  e  $\bar{w}p = \lambda\bar{v}$ , risulta  $(p, o) \in S, (f, o)(o, g)(p, o) = (pgf, o) \in k_1$  e  $(pgf, o)\tau_1 = \lambda$ , dunque  $\tau_1$  è biettiva. Inoltre, con  $a_1 = (p_1, o), a_2 = (p_2, o) \in k_1$ , si abbia  $\bar{w}p_1 = \alpha_1\bar{v}$  e  $\bar{w}p_2 = \alpha_2\bar{v}$ , ossia  $a_1\tau_1 = \alpha_1, a_2\tau_1 = \alpha_2$ ; allora  $(a_1 \perp a_2)\tau_1 = ((p_1, o)(o, g)(p_2, o))\tau_1 = (p_2gp_1, o)\tau_1 = \alpha_2\alpha_1 = (a_2\tau_1)(a_1\tau_1)$  e  $\tau_1$ , conservando ovviamente l'addizione, è antiisomorfismo di corpi. Analogamente, in riferimento a  $Dsd = k_2 = k_2(+, T)$ , risulta definita l'applicazione biettiva  $\tau_2: k_2 \rightarrow k, (o, q) \rightarrow \alpha$ , se  $\bar{v}q = \alpha\bar{w}$ , che è isomorfismo di corpi. Si completa la prova di 2) con verifiche immediate.

3) Se  $\bar{w} \in W - \{o\}$  è il vettore fissato per effettuare la costruzione introdotta in 2), si consideri l'applicazione  $\sigma_1: S \rightarrow V, (p, o) \rightarrow \bar{w}p$ . Poichè  $W = H \oplus \langle \bar{w} \rangle$  e  $S = \{(p, o) \mid p \in \text{Hom}_k(W, V), H_p = \{o\}\}$ ,  $\sigma_1$  è biettiva e, ovviamente, conserva l'addizione. Se  $x = (p, o) \in S$  e  $a = (o, q) \in k_2$ , è

$xas = (p,o)(o,q)(f,o) = (fqp,o)$  e risulta  $at_2 = \alpha$  se  $\bar{v}q = \alpha\bar{w}$ : allora  $(xas)\sigma_1 = (fqp,o)\sigma_1 = \bar{w}fqp = \alpha\bar{w}p = \alpha(x\sigma_1)$ , così  $\sigma_1$  è  $\tau_2$ -semilineare. Analogamente,  $\rho_1: D \rightarrow W$ ,  $(o,q) \rightarrow \bar{v}q$ , è applicazione biettiva e  $\tau_2$ -semilineare.

Osservazione 1. Nel seguito, si tenga presente che le applicazioni introdotte con le affermazioni 2) e 3) del precedente lemma dipendono da  $S$ ,  $D$ ,  $s$ ,  $d$ , e da  $\bar{w} \in W-H$ ,  $\bar{v} \in V-U$  opportuni, se  $H$ , risp.  $U$ , è l'iperpiano di  $W$ , risp.  $V$ , per il quale risulta  $S = \{(p,o) \mid p \in \text{Hom}_k(W,V), H_p = \{o\}\}$ , risp.  $D = \{(o,q) \mid q \in \text{Hom}_k(V,W), U_q = \{o\}\}$ .

Tenuto conto dell'osservazione 1, ricordando che le topologie che si prendono in considerazione sono quelle definite dalle forme bilineari che si hanno a disposizione, possiamo stabilire il

Teorema 1. Siano  $F_C = F_1 \circ F_2 = F_C(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k)$  e  $F'_C = F'_1 \circ F'_2 = F'_C(k', \beta': W' \times Y' \rightarrow k', b': V' \times X' \rightarrow k')$  H-anelli semplici, con ideali bilateri effettivi e ideale destro (e sinistro) minimale. Gli H-anelli  $F_C$  e  $F'_C$  sono isomorfi se e solo se vale una (almeno) delle seguenti condizioni:

- a) esistono un isomorfismo di corpi  $\mu: k \rightarrow k'$ , un omeomorfismo  $\rho: W \rightarrow W'$   $\mu$ -semilineare ed un omeomorfismo  $\sigma: V \rightarrow V'$   $\mu$ -semilineare;  
 b) esistono un antiisomorfismo di corpi  $\mu: k \rightarrow k'$ , un omeomorfismo  $\rho: Y \rightarrow W'$  nel quale  $(x+y)\rho = x\rho + y\rho$  e  $(x\alpha)\rho = (\alpha\mu)(x\rho)$  se  $x, y \in Y$  e  $\alpha \in k$ , un omeomorfismo  $\sigma: X \rightarrow V'$  nel quale  $(x+y)\sigma = x\sigma + y\sigma$  e  $(x\alpha)\sigma = (\alpha\mu)(x\sigma)$  se  $x, y \in X$  e  $\alpha \in k$ .

Dimostrazione. Sia  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  un isomorfismo di H-anelli; poichè, per il lemma 1,  $F_1$  e  $F_2$ , risp.  $F'_1$  e  $F'_2$ , sono gli unici ideali bilateri effettivi di  $F_C$ , risp.  $F'_C$ , risulta  $F_1\chi = F'_1$  e  $F_2\chi = F'_2$ , oppure  $F_1\chi = F'_2$  e  $F_2\chi = F'_1$ . Per acquisire il teorema, suddivideremo la prova nella dimostrazione delle seguenti affermazioni: i) esiste un isomorfismo  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  di H-anelli nel quale  $F_1\chi = F'_1$  e  $F_2\chi = F'_2$  se e solo se vale a); ii) esiste un isomorfismo  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  di H-anelli nel quale  $F_1\chi = F'_2$  e  $F_2\chi = F'_1$  se e solo se vale b).

Prova di i). Sia  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  un isomorfismo di H-anelli per il quale risultano  $F_1\chi = F'_1$ ,  $F_2\chi = F'_2$ . Per il lemma 1, è possibile fissare  $S \subseteq F_1$ , risp.  $D \subseteq F_2$ , ideale sinistro, risp. destro, minimale di  $F_C$  e deve risultare  $S = \{(p,o) \mid p \in \text{Hom}_k(W,V), H_p = \{o\}\}$ , risp.  $D = \{(o,q) \mid q \in \text{Hom}_k(V,W), U_q = \{o\}\}$ , con  $H$ , risp.  $U$ , opportuno iperpiano di  $W$ , risp.  $V$ . In tali condizioni, tenuto conto del lemma 2 e dell'osservazione 1, possiamo determinare  $s \in S$ ,  $d \in D$ ,  $\bar{w} \in W-H$  e  $\bar{v} \in V-U$  in modo da realizzare la situazione descritta da quel lemma.  $S' = S\chi \subseteq F'_1$ , risp.  $D' = D\chi \subseteq F'_2$ , è ideale

sinistro, risp. destro, minimale di  $F'_C$  e, se si pone  $s' = s\chi$ ,  $d' = d\chi$ , risulta  $x'd's' = x'$  se  $x' \in S'$  e  $d's'y' = y'$  se  $y' \in D'$ . Per il lemma 2, sono individuati i corpi  $k'_1(+, L) = k'_1 = s'd'S'$  e  $k'_2(+, T) = k'_2 = D's'd'$ ; anzi, quel lemma e l'osservazione 1 garantiscono che  $S' = \{(p', o) \mid p' \in \text{Hom}_k(W', V')\}$ ,  $H'p' = \{o\}$  con  $H'$  opportuno iperpiano di  $W'$  e  $D' = \{(o, q') \mid q' \in \text{Hom}_k(V', W')\}$ ,  $U'q' = \{o\}$  con  $U'$  opportuno iperpiano di  $V'$ , e che fissando opportunamente  $\bar{w}' \in W' - H'$  e  $\bar{v}' \in V' - U'$  si definiscono l'antiisomorfismo  $\tau'_1: k'_1 \rightarrow k'$  e l'isomorfismo  $\tau'_2: k'_2 \rightarrow k'$ . In piú, i gruppi additivi sostegno di  $S'$  e  $D'$  acquistano struttura di  $k'_2$ -spazi vettoriali sinistri e, come nel lemma 2, si individuano le applicazioni biettive e  $\tau'_2$ -semilineari  $\sigma'_1: S' \rightarrow V'$  e  $\rho'_1: D' \rightarrow W'$ . Se si indica con  $\xi$  la restrizione di  $\chi$  a  $k_2$ , risulta  $k_2\xi = (Dsd)\xi = D's'd' = k'_2$ , quindi  $\xi$  è isomorfismo additivo da  $k_2$  a  $k'_2$ ; inoltre, se  $a, b \in k_2$ , si ha  $(aTb)\xi = (asb)\xi = (a\xi)(s\xi)(b\xi) = (a\xi)s'(b\xi) = (a\xi)T(b\xi)$  e  $\xi$  è isomorfismo di corpi. Ne segue che l'applicazione  $\mu = \tau'_2\xi\tau'_1$  è un isomorfismo dal corpo  $k$  al corpo  $k'$ . Se  $v \in V$  e  $w \in W$ , con le posizioni  $v\sigma = v\sigma'_1\chi\sigma'_1$  e  $w\rho = w\rho'_1\chi\rho'_1$ , si definiscono le applicazioni  $\sigma: V \rightarrow V'$  e  $\rho: W \rightarrow W'$ , che risultano biettive e  $\mu$ -semilineari. Con  $(p, q) \in F'_C$ , si ponga  $(p, q)\chi = ((p, o) + (o, q))\chi = (p, o)\chi + (o, q)\chi = (p', o) + (o, q') = (p', q') \in F'_C$ ; proveremo che si ha  $p' = \rho^{-1}p\sigma$  e, analogamente,  $q' = \sigma^{-1}q\rho$ . Infatti, si ricordi che, se  $w \in W$ ,  $w\rho = w'$  significa  $w = \bar{v}h$  con  $(o, h) \in D$  per cui  $(o, h)\rho_1 = w$  e  $w' = \bar{v}'h'$  con  $(o, h)\chi = (o, h') \in D'$ ; di conseguenza, se  $(p, o) \in F_1$  e  $(p, o)\chi = (p', o) \in F'_1$ , si ha  $w\rho p' = \bar{v}h\rho'_1\chi\rho'_1 p' = (o, h)\chi\rho'_1 p' = \bar{v}'h'p'$ ; d'altra parte, se  $s = (f, o)$  è  $\bar{w}f = \bar{v}$ , e  $w\rho\sigma = \bar{v}h\rho\sigma = \bar{w}f\rho\sigma$ ,  $(fhp, o) = (p, o)(o, h)(f, o) \in S$ , quindi  $w\rho\sigma = \bar{w}(fhp)\sigma'_1\chi\sigma'_1 = (fhp, o)\chi\sigma'_1 = (f'h'p', o)\sigma'_1 = \bar{w}'f'h'p' = \bar{v}'h'p'$ ; ne segue  $\rho p' = p\sigma$ , che è quanto dovuto. Dimostriamo ora la continuità dell'applicazione  $\mu$ -semilineare  $\sigma: V \rightarrow V'$ , avvertendo che similmente si provano la continuità di  $\rho$  e, in riferimento all'isomorfismo  $\chi^{-1}: F'_C \rightarrow F_C$ , la continuità di  $\sigma^{-1}$  e  $\rho^{-1}$ . Perciò, faremo vedere che esiste  $\sigma^*: X' \rightarrow X$ , aggiunta di  $\sigma$  rispetto a  $b$  e  $b'$ , per la quale risulta  $b'(v\sigma, x')\mu^{-1} = b(v, x'\sigma^*)$  se  $v \in V$  e  $x' \in X'$ . A tale scopo, si osservi che  $x' \in X'$  definisce  $(o, q') \in F'_2$  ponendo  $v'q' = b'(v', x')\bar{w}'$  se  $v' \in V'$  (e se  $\bar{w}' \in W' - H'$  è il vettore già fissato in precedenza a norma dell'osservazione 1) ed esiste un unico elemento  $\psi'$  di  $V'^*$  per cui  $H'\psi' = \{o\}$  e  $\bar{w}'\psi' = 1$ ; ne deriva che  $x'$  individua  $(o, q) \in F_2$  tale che  $(o, q)\chi = (o, q')$  e  $\psi \in W^*$  con la pretesa  $\psi = \rho\psi'\mu^{-1}$  mentre, come già provato, è  $q' = \sigma^{-1}q\rho$ . In conseguenza,  $x'$  definisce  $q\psi = \sigma q'\rho^{-1}\rho\psi'\mu^{-1} = \sigma q'\psi'\mu^{-1} \in V^*$ ; d'altronde,  $(o, q) \in F_2$  comporta l'esistenza di  $w_1, w_2, \dots, w_i \in W$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_i \in X$  tali che  $vq = \sum_{i=1}^i b(v, x_i)w_i$  se  $v \in V$  e  $vq\psi = b(v, x)$  con  $x = \sum_{i=1}^i x_i(w_i, \psi)$  individuato da

$q\psi$  e, quindi, da  $x'$ . Si determina così l'applicazione  $\sigma^*: X' \rightarrow X$  nella quale  $x'\sigma^* = x$  se  $x' \in X'$  e risulta, con  $v \in V$  e  $x' \in X'$ ,  $b'(v\sigma, x') = v\sigma q'\psi' = v\sigma\sigma^{-1}q\psi\mu' = vq\psi\mu = b(v, x'\sigma^*)\mu$  e  $b'(v\sigma, x')\mu^{-1} = b(v, x'\sigma^*)$  fornisce quanto dovuto.

Viceversa, se  $\mu: k \rightarrow k'$  è un isomorfismo di corpi e  $\rho: W \rightarrow W'$ ,  $\sigma: V \rightarrow V'$  sono omeomorfismi  $\mu$ -semilineari, l'applicazione  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$ ,  $(p, q) \rightarrow (p, q)\chi = (\rho^{-1}p\sigma, \sigma^{-1}q\rho)$ , è un isomorfismo di H-anelli nel quale  $F_1\chi = F'_1$ ,  $F_2\chi = F'_2$ .

Prova di ii). Sia  $k^{OP}$  il corpo opposto di  $k$  <sup>(1)</sup>. I gruppi additivi sostegno di  $X$  e  $Y$ , risp.  $V$  e  $W$ , acquistano in maniera naturale struttura di  $k^{OP}$ -spazi vettoriali sinistri  $X^{OP}$  e  $Y^{OP}$ , risp. destri  $V^{OP}$  e  $W^{OP}$  <sup>(2)</sup>, e le applicazioni  $b^{OP}: X^{OP} \times V^{OP} \rightarrow k^{OP}$ ,  $(x, v) \rightarrow b^{OP}(x, v) = b(v, x)$ , e  $\beta^{OP}: Y^{OP} \times W^{OP} \rightarrow k^{OP}$ ,  $(y, w) \rightarrow \beta^{OP}(y, w) = \beta(w, y)$ , sono forme bilineari non degeneri. Con tali dati costruiamo l'H-anello semplice, con ideali bilateri effettivi ed ideale destro minimale:  $F_C^{OP} = F_1^{OP} \oplus F_2^{OP} = F_C^{OP}(k^{OP}, b^{OP}: X^{OP} \times V^{OP} \rightarrow k^{OP}, \beta^{OP}: Y^{OP} \times W^{OP} \rightarrow k^{OP})$ . Si osservi che, come si prova con una semplice verifica, la  $V^{OP}$ -topologia di  $X^{OP}$ , risp. la  $W^{OP}$ -topologia di  $Y^{OP}$ , definita dalla forma bilineare  $b^{OP}$ , risp.  $\beta^{OP}$ , coincide con la  $V$ -topologia di  $X$ , risp. la  $W$ -topologia di  $Y$ , definita da  $b$ , risp.  $\beta$ . Se  $(o, q) \in F_2$ , sia  $q^*: Y \rightarrow X$  l'aggiunta di  $q$  rispetto alle forme  $\beta$  e  $b$ ;  $q^*$  è applicazione  $k$ -lineare, risulta  $\dim_k Yq^* < \infty$  e, poichè  $Y^{OP} = Y$  e  $X^{OP} = X$  a livello di gruppi additivi,  $q^*$  è anche, ovviamente, applicazione  $k^{OP}$ -lineare (di rango finito) da  $Y^{OP}$  a  $X^{OP}$ ; inoltre, per ogni  $v \in V$  e  $y \in Y$ , si ha  $\beta(vq, y) = b(v, yq^*)$ , da cui  $b^{OP}(yq^*, v) = \beta^{OP}(y, vq)$ , quindi  $q$  è aggiunta di  $q^*$  rispetto a  $b^{OP}$  e  $\beta^{OP}$ . Ne deriva  $(q^*, o) \in F_1^{OP}$ , e, invertendo le considerazioni precedenti, si conclude  $F_1^{OP} = \{(q^*, o) \mid (o, q) \in F_2\}$ ; analogamente si prova  $F_2^{OP} = \{(o, p^*) \mid (p, o) \in F_1\}$ . L'applicazione  $\theta: F_C \rightarrow F_C^{OP}$ ,  $(p, q) \rightarrow (q^*, p^*)$ , è biettiva, risulta un isomorfismo di H-anelli poichè, se  $(p, o), (r, o) \in F_1$  e  $(o, q), (o, s) \in F_2$ , si ha  $(pqr)^* = r^*q^*p^*$  e  $(qrs)^* = s^*r^*q^*$ , ed in tale isomorfismo è  $F_1\theta = F_2^{OP}$  e  $F_2\theta = F_1^{OP}$ . Con tali premesse, sia  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  un isomorfismo di H-anelli nel quale

(1) Il gruppo additivo sostegno di  $k(+, \cdot)$  acquista struttura di corpo  $k^{OP}(+, \cdot)$  con la posizione  $a \cdot b = b \cdot a$  se  $a, b \in k^{OP}$ ; l'applicazione identica dell'insieme sostegno del corpo  $k$  è, ovviamente, un antiisomorfismo dal corpo  $k$  al corpo  $k^{OP}$ .

(2) A partire da un  $k$ -spazio vettoriale destro  $A$ , risp. sinistro  $B$ , se si fa agire  $a \in k$  su  $a \in A$ , risp.  $b \in B$ , ottenendo  $aa$ , risp.  $ab$ , nella struttura di  $k$ -spazio vettoriale che compete ad  $A$ , risp.  $B$ , si perviene ad un  $k^{OP}$ -spazio vettoriale sinistro, risp. destro, che denotiamo con  $A^{OP}$ , risp.  $B^{OP}$ .

$F_1\chi = F_2'$  e  $F_2\chi = F_1'$ ; allora l'applicazione  $\theta^{-1}\chi : F_C^{OP} \rightarrow F_C'$  è un isomorfismo di H-anelli e risulta  $F_1^{OP}\theta^{-1}\chi = F_1'$  e  $F_2^{OP}\theta^{-1}\chi = F_2'$ . Per quanto già provato in i), esistono un isomorfismo di corpi  $\mu : k^{OP} \rightarrow k'$  e due omeomorfismi  $\mu$ -semilineari  $\rho : Y^{OP} \rightarrow W'$  e  $\sigma : X^{OP} \rightarrow V'$ ; dunque  $\mu : k \rightarrow k'$  è antiisomorfismo di corpi e, poichè  $Y = Y^{OP}$  e  $X = X^{OP}$  a livello di gruppi additivi, si possono leggere  $\rho : Y \rightarrow W'$ ,  $\sigma : X \rightarrow V'$  e con una semplice verifica si prova che tali applicazioni soddisfano tutte le condizioni enunciate in b).

Viceversa, siano  $\mu : k \rightarrow k'$  un antiisomorfismo di corpi,  $\rho : Y \rightarrow W'$  e  $\sigma : X \rightarrow V'$  omeomorfismi additivi nei quali  $(y\alpha)\rho = (\alpha\mu)(y\rho)$  e  $(x\alpha)\sigma = (\alpha\mu)(x\sigma)$  se  $y \in Y$ ,  $x \in X$  e  $\alpha \in k$ ; indicando con \* l'aggiunzione rispetto alle forme bilineari  $\beta$  e  $b$ , si definisce l'applicazione  $\chi : F_C \rightarrow F_C'$ ,  $(p, q) \rightarrow (\rho^{-1}q^*\sigma, \sigma^{-1}p^*\rho)$ , che è un isomorfismo di H-anelli nel quale  $F_1\chi = F_2'$  e  $F_2\chi = F_1'$ .

Se  $F_C = F_C(k, \beta : W \times Y \rightarrow k, b : V \times X \rightarrow k)$  si suppone H-anello artiniiano (a destra ed a sinistra), deve essere ([6]; teoremi 1 e 2)  $\dim_k W < \infty$ ,  $\dim_k V < \infty$ ; quindi,  $F_C = \text{Hom}_k(W, V) \otimes \text{Hom}_k(V, W)$  poichè, allora,  $F_C$  descrive la classe degli H-anelli semplici, artiniani, con ideale bilatero effettivo, quando si assume  $Y = W^*$ ,  $X = V^*$  e  $\beta, b$  sono gli accoppiamenti naturali dello spazio con il suo duale. Ne deriva:

Corollario 1 ([1]; teorema 2). Gli H-anelli semplici, artiniani, con ideale bilatero effettivo,  $F_C = F_C(k, \beta : W \times W^* \rightarrow k, b : V \times V^* \rightarrow k)$  e  $F_C' = F_C'(k', \beta' : W' \times W'^* \rightarrow k', b' : V' \times V'^* \rightarrow k')$  sono isomorfi se e solo se risulta  $\dim_k W = \dim_{k'} W'$ ,  $\dim_k V = \dim_{k'} V'$  (tali dimensioni essendo finite), ed il corpo  $k$  è isomorfo oppure antiisomorfo al corpo  $k'$ .

Dimostrazione. Gli spazi vettoriali a disposizione sono tutti di dimensione finita; pertanto, ogni topologia che si considera è la topologia discreta. Ne segue che la condizione a) del teorema 1 equivale a pretendere l'isomorfismo dei corpi  $k$  e  $k'$  e le uguaglianze  $\dim_k W = \dim_{k'} W'$ ,  $\dim_k V = \dim_{k'} V'$ , mentre la condizione b) di quel teorema si traduce nella pretesa che i corpi  $k$  e  $k'$  siano antiisomorfi e che si abbia  $\dim_{k'} W' = (\dim_k W^* =) \dim_k W$  e  $\dim_{k'} V' = (\dim_k V^* =) \dim_k V$ .

## 2. Isomorfismo di H-anelli semplici, privi di ideali bilateri effettivi, dotati di ideale destro (e sinistro) minimale.

Per le definizioni si rimanda al n. 1 di [4], dove si prova ([4]; teoremi 2 e 3) che tutti e soli gli H-anelli primitivi con ideale destro (e sinistro) minimale si ottengono, a meno di isomorfismi, al seguente modo:

siano  $k$  un corpo (non necessariamente commutativo),  $\tau: k \rightarrow k$  un suo antiautomorfismo involutorio,  $V$  e  $W$   $k$ -spazi vettoriali sinistri non nulli,  $h: V \times V \rightarrow k$  e  $g: W \times W \rightarrow k$  forme sesquilineari a destra, relative a  $\tau$ , non degeneri, entrambe hermitiane oppure (bilineari e) alternanti. Con tali dati si individuano  $L_C = \{p \in \text{Hom}_k(V, W) \mid \text{esiste } p^* \in \text{Hom}_k(W, V) \text{ per cui } g(xp, y) = h(x, yp^*) \text{ se } x \in V \text{ e } y \in W\}$  <sup>(3)</sup>, e  $F_C = \{p \in L_C \mid p \text{ ha rango finito}\}$ , che sono sottogruppi densi rispetto alla topologia finita di  $\text{Hom}_k(V, W)$ . Il gruppo abeliano  $L_C$  acquista struttura di H-anello con la applicazione  $L_C \times L_C \times L_C \rightarrow L_C$ ,  $(f, p, q) \mapsto fp^*q$ ;  $F_C$  risulta ideale minimale di  $L_C$  e, come H-anello, descrive la classe degli H-anelli semplici, privi di ideali bilateri effettivi e con ideale destro (e sinistro) minimale. Inoltre, se  $R$  è un H-anello per cui

$$(2) \quad F_C \subseteq R \subseteq L_C$$

(inclusione di H-anelli),  $R$  è primitivo e possiede ideale destro (e sinistro) minimale; d'altra parte, la condizione (2) individua, a meno di isomorfismi, tutti gli H-anelli  $R$  primitivi e dotati di ideale destro (e sinistro) minimale.

Conglobiamo i dati precisati nelle scritture  $F_C = F_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$  e  $L_C = L_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$ .

Con tali notazioni, si può considerare l'H-anello primitivo, con ideale destro (e sinistro) minimale  $\bar{L}_C = \bar{L}_C(k, \tau, g: W \times W \rightarrow k, h: V \times V \rightarrow k) = \{q \in \text{Hom}_k(W, V) \mid \text{esiste } q_* \in \text{Hom}_k(V, W) \text{ per cui } h(xq, y) = g(x, yq_*) \text{ se } x \in W \text{ e } y \in V\}$ ; risulta  $\bar{L}_C = L_C^* = \{p^* \mid p \in L_C\}$ ,  $L_C = (\bar{L}_C)_* = \{q_* \mid q \in \bar{L}_C\}$ , e, se  $p \in L_C$ ,  $q \in L_C^*$ , si ha  $(p^*)_* = p$ ,  $(q_*)^* = q$ ; tenuto conto che, con  $f, p, q \in L_C$  e  $r, s, t \in L_C^*$ , vale  $(fp^*q)^* = q^*pf^*$  e  $(rs_*t)_* = t_*sr_*$ , le applicazioni  $*$ :  $L_C \rightarrow L_C^*$ ,  $p \mapsto p^*$ , e  $*$ :  $L_C^* \rightarrow L_C$ ,  $q \mapsto q_*$ , sono antiisomorfismi di H-anelli; similmente, risulta  $F_C^* = \{p^* \mid p \in F_C\} = \{q \in L_C^* \mid q \text{ ha rango finito}\}$  e le applicazioni  $*$ :  $F_C \rightarrow F_C^*$ ,  $p \mapsto p^*$ , e  $*$ :  $F_C^* \rightarrow F_C$ ,  $q \mapsto q_*$ , sono antiisomorfismi di H-anelli.

Se  $L'_C = L'_C(k', \tau', h': V' \times V' \rightarrow k', g': W' \times W' \rightarrow k')$  è un H-anello primitivo con ideale destro (e sinistro) minimale e  $\chi: L_C \rightarrow L'_C$  è un isomorfismo di H-anelli, con  $q \in L_C^*$  risulta  $q_* \in L'_C$ ,  $(q_*\chi) \in L'^*_C$  <sup>(4)</sup> e l'applicazione  $\chi^*: L_C^* \rightarrow L'^*_C$ ,  $q \mapsto (q_*\chi)^*$ , è un isomorfismo di H-anelli che si può leggere, ponendo  $q = p^*$  (con  $p \in L_C$  opportuna),  $p^*\chi^* = ((p^*)_*\chi)^* = (p\chi)^*$ . Analo

(3) In tale caso,  $p^*$  si dice aggiunta (a sinistra) di  $p$  rispetto alle forme  $g$  e  $h$ .

(4) Con  $*$  indicheremo (anche) l'aggiunzione rispetto alle forme  $g'$  e  $h'$ .

gamente, se  $F'_C = F'_C(k', \tau', h' : V' \times V' \rightarrow k', g' : W' \times W' \rightarrow k')$  è un H-anello semplice, privo di ideali bilateri effettivi e dotato di ideale destro (e sinistro) minimale, ad ogni isomorfismo di H-anelli  $\chi : F'_C \rightarrow F'_C$  risulta canonicamente associato l'isomorfismo di H-anelli  $\chi^* : F_C^* \rightarrow F_C^*$ ,  $p^* \rightarrow (p\chi)^* = p^*\chi^*$ .

Per agevolare la dimostrazione del teorema 2, si premettono alcuni lemmi.

Lemma 3. Sia  $F_C = F_C(k, \tau, h : V \times V \rightarrow k, g : W \times W \rightarrow k)$  un H-anello semplice, con ideale destro (e sinistro) minimale, privo di ideali bilateri effettivi. L'applicazione lineare  $p : V \rightarrow W$  avente rango 1 appartiene a  $F_C$  se e solo se esistono  $v \in V - \{0\}$ ,  $w \in W - \{0\}$  tali che  $xp = h(x, v)w$  quando  $x \in V$ . Anzi, in tale caso, si ha  $yp^* = g(y, w)v$  per ogni  $y \in W$  se  $h$  e  $g$  non sono entrambe alternanti; risulta invece  $yp^* = g(w, y)v$  per ogni  $y \in W$  se  $h$  e  $g$  sono entrambe alternanti.

Dimostrazione. Con  $H = \ker p$  e  $z \in V - \ker p$ , si ha  $V = H \oplus \langle z \rangle$ ,  $H p = \{0\}$  e  $z p = w \neq 0$ . Poiché  $p$  è elemento di  $F_C$ , essa possiede aggiunta  $p^*$ , dovendo risultare  $g(xp, y) = h(x, yp^*)$  se  $x \in V$  e  $y \in W$ ; esiste allora  $y_1 \in W$  per cui  $h(z, y_1 p^*) = \alpha \neq 0$  e si ha  $xp = h(x, v)w$ , quando  $x \in V$ , se si assume  $v = ((\alpha^{-1})\tau y_1)p^*$ . La prova del lemma si conclude con semplici verifiche.

Lemma 4. Se  $F_C = F_C(k, \tau, h : V \times V \rightarrow k, g : W \times W \rightarrow k)$  è un H-anello semplice, con ideale destro (e sinistro) minimale, privo di ideali bilateri effettivi, si ha :

1)  $D$  è ideale destro minimale di  $F_C$  se e solo se esiste  $v \in V - \{0\}$  tale che, con  $H = \langle v \rangle^\perp = \{x \in V \mid h(x, v) = 0\}$  iperpiano di  $V$ , si abbia  $D = \{p \in \text{Hom}_k(V, W) \mid H p = \{0\}\}$ ;

2)  $S$  è ideale sinistro minimale di  $F_C$  se e solo se esiste  $w \in W - \{0\}$  tale che, con  $U = \langle w \rangle^\perp = \{z \in W \mid g(z, w) = 0\}$  iperpiano di  $W$ , si abbia  $S^* = \{q \in \text{Hom}_k(W, V) \mid U q = \{0\}\}$ .

Dimostrazione. 1) Analoga alla dimostrazione dell'affermazione 2) del lemma 1.

2) L'applicazione  $F_C \rightarrow F_C^*$ ,  $p \rightarrow p^*$ , è un antiisomorfismo di H-anelli, per ciò  $S^* = \{p^* \mid p \in S\}$  è ideale destro minimale dell'H-anello  $F_C^*$ ; allora l'affermazione 2) si riduce all'affermazione 1) relativamente all'H-anello  $F_C^*$  ed al suo ideale destro minimale  $S^*$ .

Lemma 5. Se  $D$ , risp.  $S$ , è ideale destro, risp. sinistro, minimale dell'H-anello  $F_C = F_C(k, \tau, h : V \times V \rightarrow k, g : W \times W \rightarrow k)$ , si ha :

1) siano  $s \in S$  e  $d \in D$  per i quali risulti  $xd^*s = x$  quando  $x \in S$ ,  $ds^*y = y$  quando  $y \in D$ ; allora  $k_1 = S^*ds^*$ , risp.  $k_2 = Ds^*d$ , sottogruppo del gruppo additivo sostegno di  $F_C^*$ , risp.  $F_C$ , acquista struttura di corpo  $k_1(+, \perp)$ , risp.  $k_2(+, \top)$ , ponendo  $a \perp b = adb$  se  $a, b \in k_1$ , risp.  $a \top b = as^*b$  se  $a, b \in k_2$ ; inoltre, esistono  $d \in D$  e  $s \in S$  che realizzano quanto precisato;

2)  $D, S, d, s$  e le condizioni enunciate in 1) consentono di definire due isomorfismi di corpi  $\tau_1: k_1 \rightarrow k$  e  $\tau_2: k_2 \rightarrow k$ ; il gruppo additivo sostegno di  $D$ , risp.  $S^*$ , è strutturato a  $k_2$ -spazio vettoriale sinistro mediante l'applicazione  $k_2 \times D \rightarrow D, (a, p) \rightarrow as^*p$ , risp.  $k_2 \times S^* \rightarrow S^*, (b, q) \rightarrow (b\tau_2\tau_1^{-1})dq$ ;

3) realizzata la situazione descritta in 2), si può definire un'applicazione biettiva  $\rho_1: D \rightarrow W$ , risp.  $\sigma_1: S^* \rightarrow V$ , che risulta  $\tau_2$ -semilineare.

Dimostrazione. 1) Ragionando come per la 1) del lemma 2, si prova che  $k_2$  è un corpo. Similmente, poichè  $S^*$ , risp.  $D^*$ , è ideale destro, risp. sinistro, minimale di  $F_C^*$  e risulta  $x^* = (xd^*s)^* = s^*dx^*$  con  $x^* \in S^*$  e  $y^* = (ds^*y)^* = y^*sd^*$  con  $y^* \in D^*$ , tali considerazioni, riferite a  $F_C^*$ , assicurano quanto dovuto per  $k_1$ . Come nel lemma 7 di [4], si prova l'esistenza di  $s \in S$  e  $d \in D$  verificanti le condizioni enunciate.

2) Per il lemma 4, è  $D = \{p \in \text{Hom}_k(V, W) \mid Hp = \{0\}\}$ , risp.  $S^* = \{q \in \text{Hom}_k(W, V) \mid Uq = \{0\}\}$ , con  $H$ , risp.  $U$ , opportuno iperpiano di  $V$ , risp.  $W$ . Se  $x \in V - H$ , è  $0 \neq xd = \bar{w}$  e  $\bar{w}s^* = \alpha x + z$  con  $\alpha \in k$  e  $z \in H$ ; da  $ds^*d = d$  segue  $\bar{w} = xd = xds^*d = \alpha\bar{w}$ , perciò  $\alpha = 1$ ,  $\bar{w} \in W - U$  e, posto  $\bar{v} = x + z$ , risulta  $\bar{v} \in V - H$ ,  $\bar{w}s^* = \bar{v}$ ,  $\bar{v}d = \bar{w}$ . Con  $p \in k_2$ , è  $Hp = \{0\}$  e, se  $\bar{v}p = \lambda\bar{w}$  con  $\lambda \in k$ , si definisce l'applicazione  $\tau_2: k_2 \rightarrow k, p \rightarrow \lambda$ , individuata dai dati  $D, S, d, s, \bar{v}, \bar{w}$ , che risulta un isomorfismo di corpi. Si completa la dimostrazione con semplici verifiche.

3) Se  $\bar{v} \in V - \{0\}$  e  $\bar{w} \in W - \{0\}$  sono i vettori fissati per effettuare la costruzione di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , si definiscono le applicazioni  $\rho_1: D \rightarrow W, p \rightarrow \bar{v}p$ , e  $\sigma_1: S^* \rightarrow V, q \rightarrow \bar{w}q$ , che sono biettive e  $\tau_2$ -semilineari.

Lemma 6. Se esiste un isomorfismo dall'H-anello  $F_C = F_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$  sopra l'H-anello  $F_C' = F_C'(k', \tau', h': V' \times V' \rightarrow k', g': W' \times W' \rightarrow k')$ , la forma sesquilineare  $h$ , risp.  $g$ , è alternante se e solo se la forma sesquilineare  $h'$ , risp.  $g'$ , è alternante.

Dimostrazione. Nel lemma 5 di [4] si prova che  $h$ , risp.  $g$ , è alternante se e solo se risulta  $DD^*D = \{0\}$ , risp.  $SS^*S = \{0\}$ , per ogni ideale destro  $D$ , risp. sinistro  $S$ , minimale di  $F_C$ , e tale condizione è invariante sotto l'azione di un isomorfismo di H-anelli.

Vale il

Teorema 2. Gli H-anelli semplici, con ideale destro (e sinistro) minimale, privi di ideali bilateri effettivi  $F_C = F_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$  e  $F'_C = F'_C(k', \tau', h': V' \times V' \rightarrow k', g': W' \times W' \rightarrow k')$  sono isomorfi se e solo se esistono un isomorfismo di corpi  $\mu: k \rightarrow k'$ , due applicazioni biettive e  $\mu$ -semilineari  $\sigma: V \rightarrow V'$  e  $\rho: W \rightarrow W'$  ed un elemento  $a$  di  $k'$  tali che  $h(x, v)\mu = h'(x\sigma, v\sigma)a$  se  $x, y \in V$  e  $g(z, w)\mu = g'(z\rho, w\rho)a$  se  $z, w \in W$ .

Dimostrazione. Fissando  $D$ , risp.  $S$ , ideale destro, risp. sinistro, minimale di  $F_C$ , si determinano  $s \in S$ ,  $d \in D$ ,  $H$  iperpiano di  $V$ ,  $U$  iperpiano di  $W$ ,  $\bar{v} \in V - H$ ,  $\bar{w} \in W - U$ , in modo da realizzare la situazione descritta nel lemma 5. Inoltre, se  $\chi: F_C \rightarrow F'_C$  è un isomorfismo di H-anelli,  $D' = D\chi$ , risp.  $S' = S\chi$ , è ideale destro, risp. sinistro, minimale di  $F'_C$ , e, se si pone  $d' = d\chi$ ,  $s' = s\chi$ , risulta  $x'd's' = x'$  se  $x' \in S'$  e  $d's'y' = y'$  se  $y' \in D'$ . Per il lemma 5, sono individuati i corpi  $k'_1 = k'_1(+, L) = S' * d' s'^*$ ,  $k'_2 = k'_2(+, T) = D' s' * d'$ , e, fissando opportunamente  $H'$  iperpiano di  $V'$ ,  $U'$  iperpiano di  $W'$ ,  $\bar{v}' \in V' - H'$ ,  $\bar{w}' \in W' - U'$ , si costruiscono gli isomorfismi di corpi  $\tau'_1: k'_1 \rightarrow k'$  e  $\tau'_2: k'_2 \rightarrow k'$ ; inoltre, i gruppi additivi sostegno di  $D'$  e  $S'^*$  rispettivamente, acquistano struttura di  $k'_2$ -spazi vettoriali sinistri e si definiscono le applicazioni biettive e  $\tau'_2$ -semilineari  $\sigma'_1: S'^* \rightarrow V'$  e  $\rho'_1: D' \rightarrow W'$ . Se si denota con  $\xi$  la restrizione di  $\chi$  a  $k_2$ , risulta  $k_2\xi = (Ds * d)\xi = D's' * d' = k'_2$ ; si verifica facilmente che  $\xi: k_2 \rightarrow k'_2$  è un isomorfismo di corpi, perciò anche l'applicazione  $\mu = \tau'_2 \xi \tau'_1: k \rightarrow k'$ , è un isomorfismo di corpi; inoltre,  $\sigma: V \rightarrow V'$ ,  $v \rightarrow v\sigma = v\sigma^{-1}\chi * \sigma'_1$  e  $\rho: W \rightarrow W'$ ,  $w \rightarrow w\rho = w\rho^{-1}\chi\rho'_1$ , sono applicazioni biettive  $\mu$ -semilineari. Per completare la dimostrazione, proviamo innanzitutto che, posto  $p\chi = p'$  con  $p \in F_C$ , si ha  $p' = \sigma^{-1}p\rho$  e  $p'^* = \rho^{-1}p^*\sigma$ . Infatti, se  $v \in V$ ,  $v\sigma = v'$  vuol dire  $v\sigma^{-1}\chi * \sigma'_1 = v'$ , cioè esiste  $q^* \in S^*$  tale che  $\bar{w}q^* = v$ , con  $(q\chi)^* = q'^*$  per la quale  $\bar{w}'q'^* = v'$ ; allora  $v\sigma p' = (\bar{w}q^*)\sigma^{-1}\chi * \sigma'_1 p' = q'^* \sigma'_1 p' = \bar{w}'q'^* p'$  mentre, essendo  $\bar{w} = \bar{v}d$ , si ha  $v\rho p = \bar{w}q^* p\rho = \bar{v}d q^* p\rho$  e, poichè  $dq^* p \in D$ , risulta  $v\rho p = \bar{v}(dq^* p)\rho^{-1}\chi\rho'_1 = (dq^* p)\chi\rho'_1 = d'q'^* p'\rho'_1 = \bar{v}'d'q'^* p' = \bar{w}'q'^* p'$ , da cui  $v\sigma p' = v\rho p$  per ogni  $v \in V$ , dunque  $\sigma p' = p\rho$  e  $p' = \sigma^{-1}p\rho$ . Similmente si prova che  $p'^* = \rho^{-1}p^*\sigma$ . Si supponga ora che  $h$  e  $g$  siano non entrambe alternanti; allora, per il lemma 6, anche  $h'$  e  $g'$  sono non entrambe alternanti e, fissati  $v \in V - \{0\}$  e  $w \in W - \{0\}$ , si consideri l'applicazione  $p: V \rightarrow W$ ,  $x \rightarrow xp = h(x, v)w$ . Con  $x' = x\sigma \in V'$ , si ha  $x'p' = x'\sigma^{-1}p\rho = x\rho p = (h(x, v)w)\rho = (h(x, v)\mu)(w\rho)$ ; d'altra parte, per il lemma 3, esistono  $v_1 \in V' - \{0\}$ ,  $w_1 \in W' - \{0\}$  tali che  $x'p' = h'(x', v_1)w_1 = h'(x', \alpha v_1)(\alpha\tau)^{-1}w_1$  per ogni  $\alpha \in k - \{0\}$ ; risulta  $\langle w\rho \rangle = \langle (\alpha\tau)^{-1}w_1 \rangle$ , e, a meno di sostituire  $v_1$  con un vettore non nullo da esso linearmente dipendente, si può pretendere  $w_1 = w\rho$ , perciò  $h(x, v)\mu =$

$= h'(x\sigma, v_1)$  ; inoltre, se  $y \in V - \{0\}$ , vale  $(v+y)_1 = v_1 + y_1$ . Con  $z \in W$ ,  $z' = z\rho \in W'$ , si ha, per il lemma 3 :  $z\rho^* = g(z, w)v$ ,  $z'p'^* = g'(z', w_1)v_1 = g'(z\rho, w\rho)v_1$ , da cui  $g(z, w)v = z\rho^* = z\rho p'^*\sigma^{-1} = (g'(z\rho, w\rho)v_1)\sigma^{-1} = (g'(z\rho, w\rho)\mu^{-1})(v_1\sigma^{-1})$ , perciò  $\langle v \rangle = \langle v_1\sigma^{-1} \rangle$  ed esiste  $\alpha_v \in k - \{0\}$  tale che  $v_1\sigma^{-1} = \alpha_v v$ . Allora  $g(z, w)v = (g'(z\rho, w\rho)\mu^{-1})(\alpha_v v)$ ,  $g(z, w)\mu = g'(z\rho, w\rho)(\alpha_v\mu)$  e  $h(x, v)\mu = h'(x\sigma, v_1) = h'(x\sigma, (\alpha_v v)\sigma) = h'(x\sigma, v\sigma)(\alpha_v\mu\tau')$ . Se  $\dim_k V = 1$ , ci si può riferire, con argomentazioni simili, a  $F_C^*$ , ragionando su  $W$  e, nel caso che risulti anche  $\dim_k W = 1$ , il teorema è corollario del teorema 1 di [1] <sup>(5)</sup>. Altrimenti, siano  $v, y$  vettori linearmente indipendenti in  $V$ ; per opportuni  $\alpha_v, \alpha_y, \alpha_{v+y} \in k$ , si ha  $\alpha_v v + \alpha_y y = v_1\sigma^{-1} + y_1\sigma^{-1} = (v_1 + y_1)\sigma^{-1} = (v+y)_1\sigma^{-1} = \alpha_{v+y}(v+y)$ , perciò  $\alpha_v = \alpha_y = \alpha_{v+y}$ ; così lo scalare  $\alpha_v \in k$  che compare nelle precedenti relazioni non dipende da  $v \in V$  e si può scrivere, per ogni  $x, v \in V, z, w \in W$  :  $h(x, v)\mu = h'(x\sigma, v\sigma)(a\tau')$  e  $g(z, w)\mu = g'(z\rho, w\rho)a$  con  $a = \alpha_v\mu \in k'$ . Inoltre, se  $p \in F_C, v \in V, w \in W$ , è  $g(vp, w) = h(v, wp^*)$ , perciò  $g'(v\rho p, w\rho)a = h'(v\sigma, wp^*\sigma)(a\tau')$ ; d'altra parte, con  $v' = v\sigma$  e  $w' = w\rho$ , risulta anche  $g'(v'p', w') = h'(v', w'p'^*)$ , da cui, ricordando che  $p' = \sigma^{-1}pp$  e  $p'^* = p^{-1}p^*\sigma$ , si ha  $g'(v\rho p, w\rho) = h'(v\sigma, wp^*\sigma)$ , perciò  $a = a\tau'$  e la necessità delle condizioni enunciate nel teorema è completamente acquisita nel caso che le forme  $h$  e  $g$ , risp.  $h'$  e  $g'$ , siano non entrambe alternanti. In caso contrario, si perviene all'asserto con ragionamenti analoghi, ponendo  $a = -\alpha_v\mu$ .

Viceversa, siano  $\mu : k \rightarrow k'$  un isomorfismo di corpi,  $\sigma : V \rightarrow V'$  e  $\rho : W \rightarrow W'$  applicazioni biettive  $\mu$ -semilineari e si supponga, con  $a \in k' - \{0\}$ ,  $h(x, v)\mu = h'(x\sigma, v\sigma)a$  e  $g(z, w)\mu = g'(z\rho, w\rho)a$  per ogni  $x, v \in V, z, w \in W$ ; se  $p \in F_C$ , l'applicazione  $\sigma^{-1}p\rho : V' \rightarrow W'$  è di rango finito ed ha come aggiunta rispetto alle forme  $g'$  e  $h'$  l'applicazione  $\rho^{-1}p^*\sigma : W' \rightarrow V'$ , se  $p^*$  è aggiunta di  $p$  rispetto a  $g$  e  $h$ , in quanto, con  $v \in V$  e  $w \in W$ , si ha  $g(vp, w) = h(v, wp^*)$ , da cui  $g'(v\rho p, w\rho) = h'(v\sigma, wp^*\sigma)$  e, se  $v' = v\sigma \in V'$  e  $w' = w\rho \in W'$ , risulta  $g'(v'\sigma^{-1}p\rho, w') = h'(v', w'p'^*\sigma)$ . Allora si può definire l'applicazione  $\chi : F_C \rightarrow F'_C, p \rightarrow \sigma^{-1}p\rho$ , che è un isomorfismo di H-anelli.

Se  $F_C = F_C(k, \tau, h : V \times V \rightarrow k, g : W \times W \rightarrow k)$  si suppone H-anello artiniano (a destra ed a sinistra), deve risultare ([3]; teoremi 1 e 2)  $\dim_k V < \infty$ ,  $\dim_k W < \infty$ ; allora  $F_C = \text{Hom}_k(V, W)$  descrive la classe degli H-anelli semplici, artiniani, privi di ideali bilateri effettivi, per i quali il teorema 2 è noto ([1]; teorema 1).

<sup>(5)</sup> Il caso  $\dim_k V = \dim_k W = 1$  si può anche discutere direttamente, così da provare quanto dovuto senza usufruire del risultato citato.

3. Isomorfismo di H-anelli con ideale destro (e sinistro) minimale dotati di un modulo irriducibile e quasi fedele.

Un H-anello con ideale destro (e sinistro) minimale dotato di un modulo irriducibile e quasi fedele risulta, ([2];[4]) quasi primitivo o primitivo, a seconda che possieda ideali bilateri effettivi o ne sia privo. Inoltre, come già precisato all'inizio dei nn. 1 e 2,  $R$  è H-anello quasi primitivo con ideale destro (e sinistro) minimale se e solo se ([2]; teorema 2) esistono un corpo  $k$ ,  $W$  e  $V$   $k$ -spazi vettoriali sinistri non nulli,  $Y$  e  $X$   $k$ -spazi vettoriali destri,  $\beta: W \times Y \rightarrow k$  e  $b: V \times X \rightarrow k$  forme bilineari non degeneri, in modo che si abbia (a meno di isomorfismi)  $F_C = F_C(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k) \subseteq R \subseteq L_C = L_C(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k)$ , essendo  $\subseteq$  inclusioni di H-anelli, ed in tale caso scriveremo  $R = R(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k)$ , mentre  $R$  è H-anello primitivo con ideale destro (e sinistro) minimale se e solo se ([4]; teoremi 2 e 3) esistono un corpo  $k$ ,  $\tau: k \rightarrow k$  antiautomorfismo involutorio,  $V$  e  $W$   $k$ -spazi vettoriali sinistri non nulli,  $h: V \times V \rightarrow k$  e  $g: W \times W \rightarrow k$  forme sesquilineari (a destra, relative a  $\tau$ ) non degeneri, entrambe hermitiane oppure (bilineari e) alternanti, in modo che si abbia (a meno di isomorfismi)  $F_C = F_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k) \subseteq R \subseteq L_C = L_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$ , essendo  $\subseteq$  inclusioni di H-anelli, ed in tale caso scriveremo  $R = R(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$ .  
Vale il

Teorema 3. Siano  $R$  e  $R'$  H-anelli quasi primitivi, risp. primitivi, con ideale destro (e sinistro) minimale, quindi  $F_C \subseteq R \subseteq L_C$ ,  $F'_C \subseteq R' \subseteq L'_C$ . Se  $R$  è isomorfo a  $R'$ , si verificano le seguenti condizioni, tra loro equivalenti:

- 1)  $F_C$  è isomorfo a  $F'_C$ ;
- 2)  $L_C$  è isomorfo a  $L'_C$ .

Dimostrazione. Si proverà il teorema solo nel caso quasi primitivo, avvertendo che si ragiona in modo analogo se  $R$  e  $R'$  sono H-anelli primitivi. È noto ([2]; lemma 5) che  $F_C$  è ideale minimale di  $R$ . Se  $I$  è anch'esso ideale minimale di  $R$ , si fissi  $(p, q) \in I$ ,  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Se  $p \neq 0$ , esistono  $h \in \phi_1$ ,  $t \in \phi_2$  tali che  $0 < \dim_k W_{pth} < \infty$ , e si ha  $(pth, 0) = (h, 0)(0, t)(p, 0) \in I \cap F_C$ ; allora  $I \cap F_C$  è ideale non nullo di  $R$  e, per le minimalità precisate, risulta  $I \cap F_C = I = F_C$ . Analogamente, se  $q \neq 0$ , si prova  $I = F_C$ ; quindi  $F_C$  è l'unico ideale minimale di  $R$ . Perciò, se  $\chi: R \rightarrow R'$  è un isomorfismo di H-anelli, si deve avere  $F_C \chi = F'_C$ , dunque vale la 1).

1)  $\Rightarrow$  2). Si può supporre che valga una (almeno) delle condizioni a) e b)

del teorema 1. Nel primo caso, se  $\mu: k \rightarrow k'$  è un isomorfismo di corpi e  $\rho: W \rightarrow W'$ ,  $\sigma: V \rightarrow V'$  sono omeomorfismi  $\mu$ -semilineari, l'applicazione  $\chi: L_C \rightarrow L'_C$ ,  $(p, q) \mapsto (\rho^{-1}p\sigma, \sigma^{-1}q\rho)$ , è un isomorfismo di H-anelli. Nel secondo caso, siano  $\mu: k \rightarrow k'$  un antiisomorfismo di corpi,  $\rho: Y \rightarrow W'$  e  $\sigma: X \rightarrow V'$  omeomorfismi additivi nei quali  $(y\alpha)\rho = (\alpha\mu)(y\rho)$  e  $(x\alpha)\sigma = (\alpha\mu)(x\sigma)$  per ogni  $\alpha \in k$ ,  $y \in Y$ ,  $x \in X$ ; se si denota con  $*$  l'aggiunzione rispetto alle forme bilineari  $b$  e  $\beta$ , l'applicazione  $\chi: L_C \rightarrow L'_C$ ,  $(p, q) \mapsto (\rho^{-1}q*\sigma, \sigma^{-1}p*\rho)$ , è un isomorfismo di H-anelli.

2)  $\Rightarrow$  1) Le argomentazioni svolte per provare la prima parte dell'asserto garantiscono che ogni isomorfismo di H-anelli  $L_C \rightarrow L'_C$  trasforma  $F_C$  in  $F'_C$ .

Osservazione 2. Fissato  $F_C = F_C(k, \beta: W \times Y \rightarrow k, b: V \times X \rightarrow k)$ , risp.  $F'_C = F'_C(k, \tau, h: V \times V \rightarrow k, g: W \times W \rightarrow k)$ , l'H-anello  $L_C$  resta individuato, almeno di isomorfismi, dalla condizione di avere  $F_C$  come ideale (non nullo) minimo e di contenere una immagine isomorfa di ogni H-anello quasi primitivo, risp. primitivo, con ideale destro (e sinistro) minimale, il cui ideale (non nullo) minimo sia isomorfo a  $F_C$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Bader, Isomorfismo di H-anelli semplici e artiniani, Rend. Accad. Naz. XL, Serie IV, 98 (1979-80), 13-24.
- [2] L. Bader e A. Franchetta, Anelli ternari di Hestenes quasi primitivi, Rend. Mat., Serie VII, 1 (1981), 411-430.
- [3] F. Bartolozzi e G. Panella, Anelli ternari di Hestenes semplici, artiniani e privi di ideali bilateri effettivi, Ricerche Mat., 26 (1977), 255-275.
- [4] A. Caggegi, Anelli ternari di Hestenes primitivi, con ideale destro minimale, Ann. Mat. pura appl., Serie IV, 128 (1980), 169-191.
- [5] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 37, Revised Edition (1964).
- [6] L. Profera, Anelli ternari di Hestenes semplici e artiniani, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., Serie VIII, 62 (1977), 292-299.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta, G. Panella.



THE STEROLS OF THE SOMALIAN SPONGE PLERAPHYSILLA POPYRACEA.Nota di E. Finamore,<sup>1</sup> L. Minale<sup>1</sup> and Muktar Ali Mohammed<sup>2</sup>

Presentata dal Socio Rodolfo A. Nicolaus

Adunanza del 6 novembre 1982

**Riassunto:** La miscela di steroli liberi della Spugna Pleraphysilla papyracea è costituita da 15 componenti. I maggiori componenti sono il colesterolo (ca. 90% della miscela totale) e il 24-metilencolesterolo (ca. 5%). Alcuni costituenti minori sono stati identificati mediante spettrometria di massa e NMR sia di frazioni arricchite che di composti puri. Sono stati trovati anche i 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -perossi- $\Delta^6$ -steroli.

**Abstract.-** The free sterol mixture of the sponge Pleraphysilla papyracea was found to contain over 15 components. The major components were Cholesterol (ca. 90% of the total mixture) and 24-methylenecholesterol (ca. 5%). Some minor constituents have been identified by mass and NMR spectral analyses of enriched fractions as well as of pure compounds. They also include 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -epidioxy- $\Delta^6$ -sterols.

Introduction

Marine invertebrates have proved to be sources of unusual sterols and particularly the sponges contain the greatest variety of "non-conventional" sterols including those with unprecedented side-chain alkylation patterns and those with nuclear modifications (Minale & Sodano, 1976; Schmitz, 1978; Goad, 1978; Djerassi et al., 1979).

In our continuing search for novel marine sterols we have investigated the sterols composition of a Somalian collection of the sponge Pleraphysilla papyracea.

Methods

The animals (0.2 Kg., dry weight basis) were extracted with acetone at room temperature; after concentration the aqueous residue was extracted with chloroform (two times). The combined chloroform extracts were taken to dryness to give an oily residue (6.5 g).

<sup>1</sup> Istituto di Biorganica, Fac. Farmacia, Via L. Rodinò 22, 80138 NAPOLI, Italy.

<sup>2</sup> Facoltà di Chimica Industriale, Università Nazionale Somala, MOGADISCIO, Somalia

From the crude extract the sterols were recovered by column chromatography on silica gel with petroleum ether (b.p. 40-70°) and increasing amounts of ethyl ether. The crude sterols (329 mg) were acetylated with acetic anhydride and pyridine (12 h at room temperature) and the mixed acetates, after purification by column chromatography on silica gel with light petroleum-benzene, 1:1 (114mg), were subjected to argentation chromatography on 25% silver nitrate impregnated silica gel column with light petroleum (b.p. 40-70°C) and increasing amounts of benzene.

The fractions were monitored by GLC and accordingly combined to give 6 main fractions, which were analyzed by MS (A.E.I.-MS-30 instrument, 70 eV, temp. 160° C) and <sup>1</sup>H-NMR (270-Mz Bruker apparatus for solutions in DCl<sub>3</sub>). Analysis of the mass spectral fragmentation in terms of known process was mainly based on the following reviews (Djerassi, 1970; Budzikiewicz, 1972; Zaretskii, 1976). Analysis of NMR-spectra was mainly based on the review of Baccha & Williams, 1964.

Analytical GLC was carried out on a Carlo Erba Fractovap 2900 capillary column fitted with 18m glass capillary column of OV-101 at 240°, gas flow 5ml/min<sup>-1</sup> hydrogen.

#### Results and Discussion

GLC analysis (Fig.1) of the Pleraphysilla papyracea free sterols (acetate derivatives) revealed that the mixture is composed of over 15 peaks dominated by cholesterol (peak E) which accounts for more than 90% of the total mixture. The mixed acetates were resolved by argentation chromatography into 6 main fractions.

Fraction 1 contained cholesteryl acetate (1), m.p. 130°, MS and <sup>1</sup>H-NMR identical with that of an authentic sample.

Fraction 2, examined by GLC, was a mixture of cholesteryl acetate and peak F (tr = 1.10). This could be identified as 24-methylcholest-5,22-diene-3β-yl acetate (3) by the appearance in the MS of the mixture of ions at m/e 380 (C<sub>28</sub>:2; M<sup>+</sup>-CH<sub>3</sub>CO<sub>2</sub>H), 313 (M<sup>+</sup>- side chain and 2H transfer), 281-283 (vinylic cleavage of the 20,22 bond), 253-255 (M<sup>+</sup>-CH<sub>3</sub>CO<sub>2</sub>H-side chain with and without 2H transfer). The NMR signals at δ 0.69 and 1.02 for CH<sub>3</sub>-18 and CH<sub>3</sub>-19 in a Δ<sup>5</sup>-nucleus and 1.01 (d, J= 6.5Hz) and 0.91 (d, J= 7.0Hz) for CH<sub>3</sub>-21 and CH<sub>3</sub>-28 in a 24-methyl-Δ<sup>22</sup>unsaturated side chain supported our conclusion.

Fraction 3 still contained the previous 1 and 3, along with the peak D (tr = 0.89), which was assigned the cholesta-5,22-dien-3β-yl acetate (2) structure. The mass spectrum of the mixture showed an intense ion at m/e 366 (C<sub>27</sub>:2, M<sup>+</sup>-CH<sub>3</sub>CO<sub>2</sub>H) and other fragments corresponding to a Δ<sup>5,22</sup>-structure (see above). GLC Co-injection with an authentic sample supported our conclusion.

Fraction 4, examined by GLC, was essentially a mixture of two components

(the previous cholesta-5,22-dien-3 $\beta$ -yl acetate (2) and the peak M, tr = 1.71). Peak M was identified as 24-ethylcholest-7,24(28)-dien-3 $\beta$ -yl acetate (5). The mass spectrum showed the molecular ion at m/e 454 ( $M^+$ ,  $C_{29}:2$ ) and intense fragments at m/e 356 and 296 ( $M^+-98$ , and  $M^+-CH_3CO_2H-98$ , Mc Lafferty fragments) typical for a  $\Delta^7$ -24-ethyl-24(28)-ene system. The NMR spectrum which contained signals at  $\delta$  0.54 (s), 0.81 (s) and 5.16 (m) for  $CH_3$ -18,  $CH_3$ -19 and H-7 in a  $\Delta^7$ -structure, and  $\delta$  1.00 (d, J= 6.5Hz,  $CH_3$ -26,27), 1.59 (d, J= 6.5Hz;  $CH_3$ -29) and 5.10 (m, H-28), supported our conclusions.

Further, the absence of signal at  $\delta$  2.80 for H-25, typical for the Z-isomer, and the presence of a multiplet at  $\delta$  2.20, characteristic of the E-isomer, suggested the E-configuration of the 24(28)-double bond.

Fraction 5 mainly contained 24-methylenecholesteryl acetate (4, peak H). The mass (m/e 380 ( $M^+-CH_3CO_2H$ ), 356,296 (Mc Lafferty fragments), 281, 253, 213-211) and NMR  $\delta$  6.69 (s,  $CH_3$ -18), 1.02 (s,  $CH_3$ -19), 0.95 (d, J= 6.5Hz,  $CH_3$ -21), 1.03 (d, J= 6.5Hz,  $CH_3$ -26-27), 4.61 (m, 32-H), 4.66-4.72 (each broad s, = $CH_2$ ), 5.39 (m, 5-H) spectrum provided clear evidence for its identification. GLC co-injection with an authentic sample confirmed the identification.

Fraction 6. The more polar fraction still contained 24-methylenecholesteryl acetate along with a mixture of  $C_{27}$ ,  $C_{28}$  and  $C_{29}^{-\Delta^{22}}$ , 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -epidioxy- $\Delta^6$ -sterols. The mass spectrum showed peaks at m/e 392 ( $C_{29}H_{44}$ ;  $M^+-CH_3CO_2H-O_2$ ) 378 ( $C_{28}H_{42}$ ;  $M^+-CH_3CO_2-O_2$ ) and 364 ( $C_{27}H_{40}$ ;  $M^+-CH_3CO_2H-O_2$ ). The NMR spectrum depicted H-6 and H-7, 6.32, 6.52 (d, J= 8Hz), H-3, 5.00 (7-lines m),  $CH_3CO_2$  2.01 (s), and H-22,23, 5.20 (m). The above data established the presence of the  $\Delta^6$ - and  $\Delta^{22}$ -double bonds and the 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -epidioxy-3 $\beta$ -yl acetate grouping and thus suggested cholesta-5,7,22-trien-3 $\beta$ -yl acetate 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -peroxide (6), ergosta-5,7,22-trien-3 $\beta$ -yl acetate 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -peroxide (7) and 24-ethylcholesta-5,7,22-trien-3 $\beta$ -yl acetate 5 $\alpha$ ,8 $\alpha$ -peroxide (8) as structure for the components of this fraction. The identity of these components was supported by direct comparison of the spectral data with those of a similar mixture previously isolated from the sponge *Raphidostila incisa* (Malorni et al., 1978). Other than in *Raphidostila incisa* sterol peroxides have also been reported from the sponge *Axinella cannabina* (Fattorusso et al., 1974) and *Tethya aurantia* (Steikh & Djerassi, 1974).

Aknowledgement- The authors thank Professor M.Sarà (University of Genova, Italy) for the identification of the sponge.

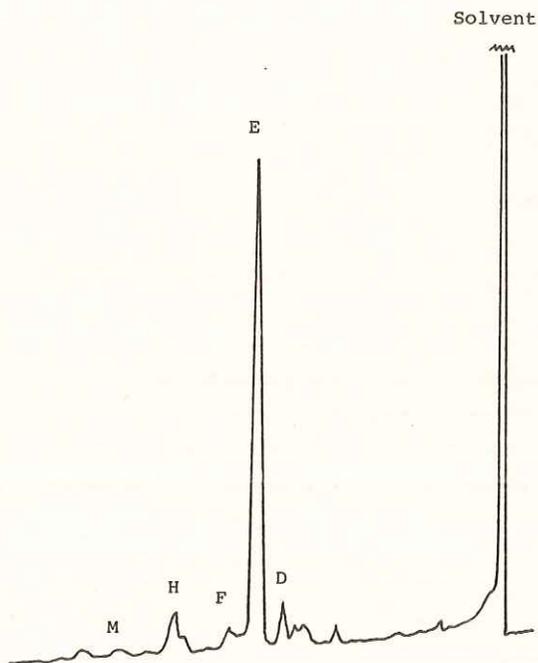
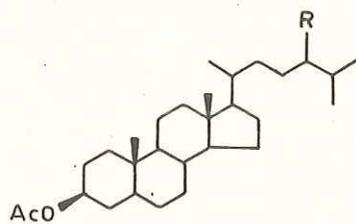


Fig. 1 - GLC trace of the total free *Pteraphysilla papyracea* sterols (acetate derivatives) on a capillary column (18mt) of OV-101 temp. 240°C

D = cholest-5,22-dien-3β-yl acetate;  
E = cholesteryl acetate;  
F = 24-methylcholest-5,22-dien-3β-yl acetate;  
H = 24-methylenecholesteryl acetate;  
M = 24-methylcholest-7,24(28)-dien-3β-yl acetate.



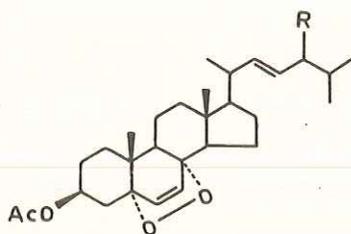
1,  $\Delta^5$  , R=H

2,  $\Delta^{5,22}$  , R=H

3,  $\Delta^{5,22}$  , R=Me

4,  $\Delta^{5,24(28)}$  , R=Me

5,  $\Delta^{5,24(28)}$  , R=Et



6 , R=H

7 , R=Me

8 , R=Et

References

- Baccha N.S. & Williams D.H. (1964) Applications of NMR Spectroscopy in Organic Chemistry. Illustrations from the steroid Field, pp.19-41 and 77-85, Holden Day San Francisco.
- Budzikiewicz H. (1972) Steroids. In Biochemical Applications of Mass Spectrometry. (Edited by Waller G.R.), pp.251-289, Wiley-Intersciences, New York.
- Djerassi C. (1970)- Applications of mass spectrometry in the steroid field. Pure Appl.Chem., 21, 205-226.
- Djerassi C., Theobald N., Kokke W.C.M.C., Pak C.S. & Carlson R.M.K. (1979) - Recent progress in the marine steroid field. Pure Appl.Chem., 51, 1815-1828.
- Fattorusso E., Magno S., Mayol L., Santacroce C. & Sica D. (1974) Sterol peroxides from the sponge Axinella cannabina, Gazz.Chim.Ital., 104, 409-413.
- Goad L.J. (1978)- The sterols of marine invertebrates. In Marine Natural Products, Chemical and Biological Perspectives (Ed.by Scheuer P.J.), Vol.II, pp.75-172, Academic Press, New York.
- Malorni A., Minale L. & Riccio R. (1978) - Steroids from sponges: occurrence of steroidal  $\Delta^4,23,6$ -diketones in the marine sponge Raphidostila incisa, Noveau Journal de Chimie, 2, 351.
- Minale L. & Sodano G. (1976) - Non-conventional sterols of marine origin. In Marine Natural Products Chemistry (Ed.by Faulkner D.J. & Fenical W.H.) pp.87-109, Plenum Press, New York.
- Schmitz F.J. (1978) - Uncommon marine steroids. In Marine Natural Products Chem. and Biological Perspectives (Ed.by Scheuer P.J.), pp.241-299, Academic Press, New York.
- Sheikh Y.M. & Djerassi C. (1974) Steroids from sponges, Tetrahedron, 30, 4095-4103.
- Zaretskii Z.V. (1976) Mass spectrometry of Steroids. Israel Universities Press, Jerusalem.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, L. Mangoni, R. Nicolaus.

I DEPOSITI MARINI DEL CICLO PLIOCENE INFERIORE-MEDIO

NEI DINTORNI DI VIETRI DI POTENZA

Nota di Silvio DI·NOCERA°, Bianca RUSSO°, Mario TORRE°

Presentata dal socio corrispondente Bruno D'ARGENIO

Adunanza del 6.11.1982

RIASSUNTO

Nei pressi di Vietri di Potenza affiora una serie di terreni costituita dal basso verso l'alto da puddinghe poligeniche, arenarie e sabbie, argille, conglomerati regressivi. In tutti gli intervalli, fatta eccezione per i livelli sommitali, si rinvencono associazioni di macrofossili e limitatamente alle peliti anche di microfossili (Foraminiferi). Le caratteristiche sedimentologiche e paleontologiche di questi depositi clastici indicano che la sedimentazione è avvenuta in ambiente marino ed è stata caratterizzata da acque profonde alcune decine di metri al massimo, normali condizioni di salinità e di ossigenazione al fondo, nonché da un clima probabilmente temperato-caldo. Le analisi micropaleontologiche e biostratigrafiche effettuate nei vari intervalli hanno rivelato la presenza di forme cronologicamente significative soltanto nelle argille, dove le associazioni a Foraminiferi planctonici indicano un'età riferibile alla parte alta del Pliocene inferiore-inizio Pliocene medio. Viene così confermata l'appartenenza dei terreni studiati al ciclo di sedimentazione Pliocene inferiore-Pliocene medio, ampiamente diffuso in vaste aree della Catena sudappenninica tra il Molise e la Lucania.

SUMMARY

Near Vietri di Potenza the outcropping series is composed at the base of polygenic conglomerates; upwards sandstones and sands, clay and regressive conglomerates follow. In all intervals, except in the top ones, there are macrofossils

---

° - Istituto di Geologia e Geofisica, Università di Napoli - Lavoro eseguito e stampato con il contributo del M.P.I.

and, particularly in the clay layers, microfossils (foraminifers) associations. The sedimentological and paleontological setting shows that the sedimentation occurred in marine environment, characterized by shallow water, normal salinity and oxygenation at bottom and, probably, temperate - warm climatic conditions. The micropaleontological and biostratigraphical analysis all over the succession shows chronologically significant forms only in the clay layers, where the planktonic foraminifers microfauna suggests an age referring to the upper part of lower Pliocene-early middle Pliocene. So the studied deposits belong to the sedimentary cycle lower-middle Pliocene, which widely outcrops in Southern Apennine between Molise and Lucania.

#### INTRODUZIONE

Depositi arenaceo-conglomeratici attribuiti al Pliocene sono noti in vaste aree dell'Italia meridionale, sia nell'area della Catena appenninica, sia sul suo bordo adriatico, dove costituiscono gli affioramenti più vasti. Sul versante tirrenico il Pliocene è poco diffuso in affioramento, con l'eccezione dei lembi conglomeratici della zona di Minturno-Formia e di quelli arenacei, peraltro di dubbia attribuzione, dei dintorni di Salerno.

In questa nota vengono esposti i risultati delle ricerche condotte sui depositi clastici pliocenici trasgressivi sul substrato mesozoico e terziario affioranti in lembi discontinui e poco potenti a sud-est del gruppo montuoso di M.te Marzano-M.te Ognà, lungo una fascia orientata all'incirca nord-ovest sud-est prevalentemente tra Romagnano al Monte e la località Piani di Mauro.

Presso Vietri di Potenza i litotipi sono essenzialmente pelitici e comprendono argille marnose o marnoso-siltose, potenti fino a 70-80 m, che passano verso l'alto a termini più sabbiosi e conglomeratici.

Lo spessore dei sedimenti pelitici, l'abbondanza in essi di microfaune marine, assenti o molto scarse nelle altre successioni della zona prevalentemente sabbiose, nonché la posizione interna alla Catena, conferiscono un particolare interesse all'analisi dell'evoluzione sedimentaria del ciclo di sedimentazione infra-mesopliocenico di Vietri di Potenza ed alla ricostruzione delle principali caratteristiche paleogeografiche di quest'area durante il Pliocene.

Tra gli autori più recenti che hanno rivolto la loro attenzione ai terreni pliocenici di Vietri di Potenza è da ricordare SGROSSO (1967) che segnala la presenza di depositi pliocenici conglomeratici e sabbiosi trasgressivi sul substrato calcareo e considera "una facies particolare" quella delle argille grigio-azzurre affioranti in località Fornace presso Vietri di Potenza. L'autore precisa inoltre che i rapporti dei terreni pliocenici con quelli del substrato non sono molto chiari e che a luoghi i termini pliocenici "....sembrano giacere

al di sotto dei terreni fliscioidi.....".

COTECCHIA e DEL PRETE (1970) distinguono un complesso terrigeno infra-mesopliocenico costituito da depositi marini clastici trasgressivi. I termini basali conglomeratici della successione possono essere sostituiti lateralmente da sabbie gialle fossilifere cui seguono verso l'alto argille azzurre, anch'esse in parte eteropiche delle sabbie. Le peliti, attribuite al Pliocene inferiore e medio, farebbero passaggio verso l'alto e lateralmente a termini grossolani sabbiosi e sabbioso-conglomeratici, che ".....potrebbero rappresentare l'inizio della fase regressiva.....".

#### LA SUCCESSIONE STRATIGRAFICA

I lembi del ciclo infra-mesopliocenico poggiano su un substrato costituito da terreni mesozoici e terziari appartenenti a diverse formazioni delle Unità Lagonegresi, della Piattaforma Carbonatica e di altre Unità per lo più fliscioidi (F° 199 -Potenza-).

In particolare a Vietri di Potenza il substrato è costituito da argille ed argille siltose scure, a luoghi verdi e rosse, con intercalazioni di arenarie, calciruditi e brecciole fossilifere; generalmente questi terreni sono interessati da vistosi fenomeni franosi che rendono difficilmente riconoscibili i loro rapporti originari con le varie formazioni circostanti. Per tale ragione non è mai visibile l'appoggio dei terreni pliocenici sui termini fliscioidi del substrato, anche laddove se ne intuisce la sovrapposizione diretta. Osservazioni più dettagliate sui terreni costituenti il substrato pre-pliocenico vengono riportate da SGROSSO (1967) e da COTECCHIA e DEL PRETE (1970).

La successione pliocenica comprende dal basso verso l'alto puddinghe poligeniche, arenarie e sabbie, argille che fanno passaggio verso l'alto a sabbie e conglomerati (Fig. 1).

#### Puddinghe poligeniche basali

I termini basali del Pliocene nell'area esaminata sono rappresentati da conglomerati trasgressivi a matrice sabbiosa con elementi arrotondati ed appiattiti; lo spessore è esiguo, tutt'al più alcuni metri.

Tra i ciottoli, che generalmente non provengono dal substrato carbonatico sul quale trasgrediscono, figurano litotipi provenienti da terreni fliscioidi e dalle Unità Lagonegresi quali marne, siltiti, argilliti rosse e ciottoli diasprini. Essi inoltre presentano dimensioni medie alquanto piccole, raggiungendo solo raramente i 10-15 cm di diametro. La matrice sabbiosa, di solito abbondante, è di

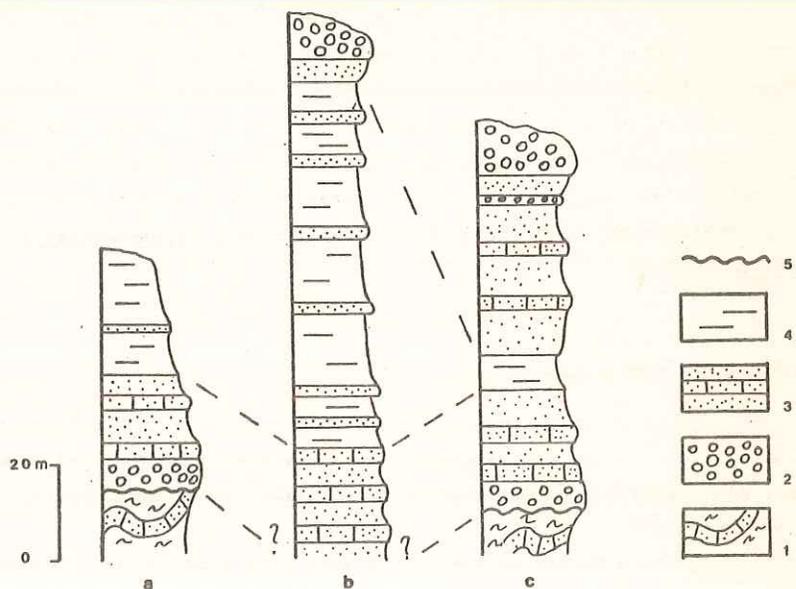


Fig. 1 - Colonne litostratigrafiche. a = Località Cammarda;  
 b = Vietri di Potenza; c = Località Piani di Mauro. 1 = Terreni pre-pliocenici; 2 = conglomerati poligenici; 3 = arenarie e sabbie; 4 = argille sabbiose e marnose; 5 = trasgressione.

colore giallo-rossastro e composta di quarzo, pochi feldspati, miche ed elementi litici calcarei.

Talora i clasti risultano del tutto subordinati rispetto alla matrice, pertanto il termine basale della trasgressione è rappresentato da sabbie più o meno ciottolose.

Gli affioramenti delle puddinghe basali sono per lo più smembrati in piccoli lembi con deboli spessori.

Nella località Cammarda, a sud-est di Romagnano al Monte, la superficie di trasgressione è marcata dalla presenza di puddinghe fossilifere in cui prevalgono ostreidi e frammenti di Briozoi. Si tratta di depositi ben stratificati in livelli di qualche decimetro in cui i ciottoli, che si mantengono sempre di piccole dimensioni, sono immersi in una prevalente matrice sabbiosa. Lo spessore complessivo è di circa 5-6 m; verso l'alto, le puddinghe fanno passaggio a sabbie (Fig. 1).

Nella zona ad ovest di Romagnano al Monte le puddinghe plioceniche poggiano

direttamente sulle Unità Carbonatiche del Mesozoico; qui la trasgressione è marcata dall'evidenza di un'intensa attività di organismi litofagi e dalla presenza di gusci di Lamellibranchi, per lo più ostreidi, che possono essere più abbondanti e di maggiori dimensioni nei primi metri della successione.

Nella località Piani di Mauro a sud-est di Vietri di Potenza non sempre le puddinghe rappresentano il termine basale della trasgressione pliocenica. Nel vallone del Salice, poggiano in discordanza sul substrato sottili livelli di puddinghe stratoidi a clasti ben arrotondati ed appiattiti che lateralmente e verticalmente, con passaggio brusco, passano a sabbie ricche di macrofossili. Nel vallone Figarolo anche se non è visibile l'appoggio diretto sul substrato, lo spessore delle puddinghe basali è di alcuni metri. Il deposito appare ben cementato e stratificato, i ciottoli sono immersi in una matrice sabbiosa di colore giallo ocra, in cui si rinvencono rari gusci di macrofossili (Gasteropodi e Lamellibranchi).

#### Arenarie e sabbie

Spostandosi verso l'alto e lateralmente ben presto i clasti di maggiori dimensioni scompaiono e la successione risulta costituita da sabbie gialle più o meno cementate, a stratificazione irregolare e di composizione uguale alla matrice delle puddinghe sottostanti. Questi livelli sabbioso-arenacei sono a luoghi trasgressivi sul substrato ed affiorano in modo discontinuo. In numerose località contengono inoltre addensamenti di macrofossili marini. In località Cammarda, lungo la SS 94 nei pressi del km 17 sul P.te dell'Arme e nella località Piani di Mauro sono stati rinvenuti infatti numerosi gusci di Lamellibranchi, tra i quali sono stati determinati i generi Chlamys, Cardium, Glycimeris, Ostrea, Pecten, Perna; talora si rinvencono anche grossi esemplari di Panopea glycimeris (BORN).

#### Argille

I maggiori affioramenti si ritrovano nei pressi di Vietri di Potenza (località Acquafredda e Fornace; Fig. 1).

In località Acquafredda, in sinistra orografica del F. Landro, sono visibili argille marnose e talora sabbiose per uno spessore di poco più di 60 m. La stratificazione è poco evidente ma è possibile riconoscere una giacitura con direzione nord-sud, immersione ad ovest e debole inclinazione. La potenza degli strati varia tra i 40-50 cm ed oltre un metro.

Alla base le argille si presentano alquanto marnose e sono molto ricche di gusci -interi o in frammenti- di Lamellibranchi, Gasteropodi e Scafopodi, di dimen-

sioni medio-piccole, nonchè di macrofossili. Verso l'alto evolvono ad argille sabbiose ed alla sommità dell'affioramento sono ricche di grossi frustoli carboniosi, grandi gusci di bivalvi e meno ricche di microfauna.

Sul versante opposto, in località Fornace, lungo la SS 94 nei pressi del km 16, le argille presentano spessore leggermente superiore (circa 80 m) ed una giacitura più inclinata (circa 50°-55°); l'immersione tende a ruotare verso il quadrante sud-ovest. Verso il basso passano gradatamente alle sottostanti sabbie ed arenarie ben cementate (Fig. 1) ricche in macrofossili, che affiorano nei pressi del km 17 (P.te dell'Arme).

La successione presenta i medesimi caratteri litologici e stratigrafici già riscontrati sul versante opposto; anche qui, verso l'alto, si riscontrano intercalazioni sabbiose più frequenti (Fig. 1) in cui sono largamente diffusi frammenti di frustoli carboniosi e, a luoghi, nuclei di pirite ossidata, associata a concentrazioni di grossi Lamellibranchi e Gasteropodi. Nella porzione sommitale dell'intervallo, per uno spessore di circa 2 m, sono state individuate concrezioni discontinue di gesso, in lame molto piatte, sviluppate secondo l'andamento degli strati, talora in aggregati cristallini laminari tipo "rosa del deserto".

In località Cammarda sono presenti, discordanti sul substrato alloctono, piccoli lembi di argille legate a porzioni delle sottostanti arenarie fossilifere. Le argille hanno uno spessore di circa 20-25 m, gli strati sono molto inclinati e l'immersione è mediamente ovest sud-ovest.

Questi livelli pelitici presentano un'abbondante scheletro sabbioso e sono ricchi di frammenti di macrofossili.

Nella località Piani di Mauro le argille grigio-azzurre sono spesse soltanto alcuni metri (Fig. 1) e presentano un forte contenuto sabbioso nonchè alcuni livelli centimetrici costituiti da accumulo di grossi gusci di molluschi (Ostrea, Pecten, ecc.).

### Sabbie e conglomerati

Alla sommità dell'intervallo argilloso si assiste ad una graduale ma rapida comparsa di sabbie fini e siltiti con frustoli carboniosi e frequenti lenti conglomeratiche. Nelle località Fornace ed Acquafredda questi depositi assumono spessori dell'ordine di alcuni metri e sono per lo più stratificati; i clasti, aventi dimensioni medie comprese tra pochi centimetri ed alcuni decimetri, sono molto assortiti, poco arrotondati ed immersi in una scarsa matrice, sabbiosa, che localmente si presenta con elaborazione giallo ocra o rossastra. Tra i clasti prevalgono i litotipi provenienti dai terreni fliscioidi.

Nella matrice dei livelli conglomeratici sommitali non sono mai stati riscontrati resti fossili di ambiente marino.

Nella località Piani di Mauro, le sabbie sono argilloso-sabbiose e presentano spessori maggiori (circa 20 m), (Fig. 1); la stratificazione poco visibile è marcata talora da livelli di macrofossili e da lenti ciottolose, particolarmente nella parte alta. L'affioramento è chiuso alla sommità da alcuni metri di puddinghe ad abbondante matrice sabbiosa giallastra con frammenti di gusci di molluschi.

#### ANALISI MICROPALAEONTOLOGICHE ED OSSERVAZIONI BIOSTRATIGRAFICHE

La campionatura è stata effettuata in tutti e quattro gli intervalli litostatigrafici costituenti la successione studiata, ma dati significativi dal punto di vista bio- e cronostatigrafico sono scaturiti soltanto dall'analisi micropaleontologica dei campioni argillosi; quelli invece prelevati nei conglomerati e nelle arenarie e sabbie, molto spesso ricchi di macrofossili rappresentati da generi non indicativi, contengono a luoghi scarse e banali microfaune a Foraminiferi. Per tale ragione vengono di seguito riportati soltanto i dati relativi alle analisi dei campioni prelevati nell'intervallo pelitico.

#### Località Acquafredda

I numerosi campioni prelevati in serie sono caratterizzati da un residuo inorganico di lavaggio quantitativamente sempre abbondante costituito essenzialmente da quarzo, feldspati e mica -quest'ultima è molto spesso subordinata-, nonché da alcuni frustoli carboniosi; soltanto in alcuni campioni si rinvennero anche tracce di pirite e frammenti di gesso.

La componente organogena è quantitativamente più o meno scarsa e rappresentata prevalentemente da Foraminiferi, oltre che da resti di Lamellibranchi, talora presenti in apprezzabili quantità, rari frammenti di echino (piastre e radioli), Gasteropodi ed Ostracodi, sporadici Otoliti e resti di Dentalium e Briozoi.

I gusci dei Foraminiferi sono di solito ben conservati e soltanto in qualche campione il plancton presenta caratteri di nanismo.

I Foraminiferi bentonici sono sempre nettamente prevalenti su quelli planctonici, che in qualche caso risultano quasi del tutto assenti.

I Foraminiferi planctonici sono rappresentati complessivamente dalle seguenti specie:

Globorotalia bononiensis DONDI

Globorotalia aff. incompta (CIFELLI)

Globorotalia aff. mediterranea CAT. e SPROV.

Globorotalia puncticulata padana DONDI e PAPETTI

Globorotalia sp.

Globigerina bulloides D'ORB.

Globigerina concinna REUSS

Globigerina falconensis BLOW

Globigerina aff. falconensis BLOW

Globigerina multiloba ROMEO

Globigerina aff. multiloba ROMEO

Globigerina quinqueloba NATLAND

Globigerina sp.

Globigerinoides ex gr. obliquus BOLLI

Globigerinoides ruber (D'ORB.)

Globigerinoides trilobus (REUSS)

Globigerinoides sp.

Orbulina universa D'ORB.

Orbulina sp.

Globigerinita glutinata (EGGER)

Tra le specie sopra elencate, G.p. padana e G. bononiensis sono sporadiche, ma rappresentate da esemplari abbastanza tipici; G. aff. mediterranea è stata rinvenuta in un solo campione, dove è rappresentata da un unico esemplare mal conservato. Infine, G. aff. multiloba e G. multiloba risultano anch'esse estremamente rare.

La microfauna bentonica è costituita da:

Textularia sp.

Bigenerina nodosaria D'ORB.

Dorothia gibbosa (D'ORB.)

Dorothia aff. gibbosa (D'ORB.)

Dorothia sp.

Martinottiella communis (D'ORB.)

Martinottiella sp.

Quinqueloculina sp.

Pyrgo sp.

Sigmoilopsis celata (COSTA)

Amphycorina scalaris (BATSCH)

Lenticulina calcar (LINNE')

Lenticulina rotulata (LAMARK)

Lenticulina vortex (FICHT. e MOLL)

Lenticulina sp.

Marginulina costata (BATSCH)

Marginulina crebica SEG.

Marginulina glabra D'ORB.

- Orthomorphina bassanii (FORN.)  
Orthomorphina tenuicostata (COSTA)  
Orthomorphina sp.  
Vaginulina sulcata COSTA  
Fissurina pseudorbignyana (BUCHNER)  
Fissurina sp.  
Sphaeroidina bulloides D'ORB.  
Bolivina alata SEG.  
Bolivina catanensis SEG.  
Bolivina dilatata REUSS  
Bolivina italica CUSH.  
Bulimina aculeata D'ORB.  
Bulimina costata D'ORB.  
Bulimina aculeata minima TEDESCHI e ZANMATTI  
Bulimina elongata D'ORB.  
Bulimina fusiformis WILL.  
Bulimina aff. fusiformis WILL.  
Bulimina sp.  
Globobulimina affinis (D'ORB.)  
Uvigerina longistriata PERCONIG  
Uvigerina peregrina CUSH.  
Hopkinsina bononiensis (FORN.)  
Trifarina brady CUSH.  
Trifarina sp.  
Gavelinopsis praegeri (HERON ALLEN e EARLAND)  
Rosalina obtusa D'ORB.  
Cancris auriculus (FICHT. e MOLL)  
Valvulineria bradyana (FORN.)  
Ammonia beccarii (LINNE')  
Elphidium aculeatum (D'ORB.)  
Elphidium crispum (LINNE')  
Elphidium macellum (FICHT. e MOLL)  
Elphidium sp.  
Criboonion advenum (CUSH.)  
Protoelphidium granosum (D'ORB.)  
Eponides sp.  
Planulina ariminensis (D'ORB.)  
Cibicides lobatulus (WALK. e JAC.)  
Cibicides pseudoungerianus (CUSH.)  
Cibicides ungerianus (D'ORB.)

Globocassidulina subglobosa (BRADY)

Nonion aff. boueanum (D'ORB.)

Pullenia bulloides (D'ORB.)

Pullenia quadriloba REUSS

Gyroidina neosoldanii BROTZEN

Gyroidina umbonata (SILV.)

Gyroidina sp.

Anomalina sp.

Molonis aff. depressulum (WALK. e JAC.)

Melonis padanum (PERCONIG)

Melonis pompilioides (FICHT. e MOLL)

Le associazioni studiate per la presenza di G. p. padana e G. bononiensis e per l'assenza di Uvigerina rutila sono da riferire ad un intervallo di tempo compreso tra la parte alta del Pliocene inferiore e la parte bassa del Pliocene medio (VEZZANI, 1966; COLALONGO, 1968; DALLAN & SALVATORINI, 1968; DONDI & PAPETTI, 1968; D'ONOFRIO, 1968; LENTINI, 1969; COLALONGO & SARTONI, 1979).

In particolare, sulla base dei confronti effettuati con microfaune analizzate in precedenti lavori riguardanti il Pliocene in Italia, le associazioni rinvenute nei sedimenti da noi studiati sono correlabili con:

- "zona B" (VEZZANI, 1966), per la presenza di M. glabra, H. bononiensis, O. bassanii, O. tenuicostata, che secondo l'autore sono esclusive di questa zona.

E' già presente in questa zona P. granosum, che, secondo l'autore invece compare nella successiva "zona C";

- "zona a Globorotalia hirsuta aemiliana" (COLALONGO, 1968), per la presenza di G. bononiensis, G.p. padana e per l'assenza di U. rutila, Globorotalia hirsuta e Globorotalia puncticulata;

- "zona a G. bononiensis" (DALLAN & SALVATORINI, 1968), che si estende dalla prima comparsa di G. bononiensis (limite inferiore) fino alla prima comparsa di G. aemiliana (limite superiore). Inoltre, il mancato ritrovamento di G. puncticulata consente di correlare le associazioni rinvenute con la parte alta della zona sopra citata (DALLAN & SALVATORINI, 1968);

- "zona a G. bononiensis" (DONDI & PAPETTI, 1968), per la presenza di G. bononiensis e di G.p. padana;

- "zona a G. h. aemiliana" (D'ONOFRIO, 1968) il cui limite inferiore coincide con la scomparsa di G. hirsuta e G. puncticulata. Riteniamo inoltre che le associazioni da noi studiate sono correlabili con la parte bassa di questa zona per la presenza di G. bononiensis, G.p. padana e per l'assenza di G. aemiliana, in accordo con quanto riscontrato dall'autore in questa zona.

Infine continua ad essere presente O. tenuicostata, che secondo D'ONOFRIO (1968), invece scompare, insieme a U. rutila, con l'inizio della "zona a G.h. ae-

miliana";

- "cenozona A1" (LENTINI, 1969), caratterizzata dalla presenza di G. bononiensis.

Inoltre, pur essendo assenti i markers zionali, le nostre associazioni potrebbero essere correlate con la "zona a Globorotalia gr. crassaformis -subzona a G. aemiliana" (COLALONGO & SARTONI, 1979) per la presenza di G. bononiensis, G.p. padana e per l'assenza di U. rutila. Infine, continua ad essere presente U. longistriata, che secondo gli autori sopra citati sarebbe invece esclusiva del Pliocene inferiore.

#### Località Fornace

La componente inorganica dei campioni prelevati in questa località è sempre quantitativamente abbondante e rappresentata prevalentemente da quarzo, feldspati e mica; quest'ultima è molto spesso subordinata rispetto ai primi due. Si rinvencono inoltre piccole quantità di frustoli carboniosi ed, in certi livelli, tracce di pirite.

La frazione organogena è più o meno scarsa e composta essenzialmente da Foraminiferi, oltre che da resti, talora frequenti, di Lamellibranchi; in alcuni campioni sono stati rinvenuti anche rari e piccoli Gasteropodi, interi o in frammenti, sporadici resti di echino (piastre e radioli) e di Ostracodi.

La microfauna a Foraminiferi si presenta in buono stato di conservazione e nel plancton sono presenti a luoghi caratteri di nanismo. Il rapporto plancton/benthos è sempre nettamente a favore del benthos, che è rappresentato da numerose forme banali diffuse in tutto il dominio neritico. Nel plancton sono presenti complessivamente le seguenti specie:

Hastigerina siphonifera (D'ORB.)

Globorotalia puncticulata padana DONDI e PAPETTI

Globorotalia sp.

Globigerina bulloides D'ORB.

Globigerina concinna REUSS

Globigerina aff. concinna REUSS

Globigerina falconensis BLOW

Globigerina aff. falconensis BLOW

Globigerina quinqueloba NATLAND

Globigerina sp.

Globigerinoides ruber (D'ORB.)

Globigerinoides sp.

Orbulina universa D'ORB.

Globigerinita glutinata (EGGER)

Anche in questi campioni, G.p. padana è sporadica. Globorotalia bononiensis è assente. I Foraminiferi bentonici sono rappresentati dalle seguenti specie:

Spiroplectammina wrighti (SILV.)  
Textularia calva LALIKER  
Textularia sp.  
Bigenerina nodosaria D'ORB.  
Dorothia gibbosa (D'ORB.)  
Dorothia aff. gibbosa (D'ORB.)  
Dorothia sp.  
Martinottiella sp.  
Quinqueloculina sp.  
Sigmoilopsis celata (COSTA)  
Amphycorina scalaris (BATSCH)  
Lagenonodosaria sp.  
Lenticulina cultrata (MONTFORT)  
Lenticulina rotulata (LAMARK)  
Lenticulina sp.  
Marginulina crebricosta SEG.  
Marginulina glabra D'ORB.  
Orthomorphina tenuicostata (COSTA)  
Plectofrondicularia aff. semicosta (KARRER)  
Fissurina pseudorbignyana (BUCHNER)  
Spaeroidina bulloides D'ORB.  
Bolivina catanensis SEG.  
Bolivina dilatata REUSS  
Bolivina aff. italica CUSH.  
Stilostomella monilis (SILV.)  
Bulimina costata D'ORB.  
Bulimina fusiformis WILL.  
Bulimina aff. fusiformis WILL.  
Bulimina sp.  
Uvigerina longistriata PERCONIG  
Uvigerina peregrina CUSH.  
Trifarina brady CUSH.  
Gavelinopsis praegeri (HERON ALLEN e EARLAND)  
Valvulineria bradyana (FORN.)  
Ammonia beccarii (LINNE')  
Elphidium crispum (LINNE')  
Elphidium sp.  
Cribrononion advenum (CUSH.)

Cribrononion decipiens (COSTA)  
Cribrononion aff. decipiens (COSTA)  
Protoelphidium aff. granosum (D'ORB.)  
Eponides sp.  
Planulina ariminensis (D'ORB.)  
Cibicides lobatulus (WALK. e JAC.)  
Cibicides pseudoungerianus (CUSH.)  
Cibicides ungerianus (D'ORB.)  
Cassidulina crassa D'ORB.  
Cassidulina laevigata-carinata SILV.  
Globocassidulina subglobosa (BRADY)  
Nonion aff. boueanum (D'ORB.)  
Pullenia bulloides (D'ORB.)  
Gyroidina altiformis R.E. e R.C. STEWART  
Gyroidina neosoldanii BROTZEN  
Gyroidina soldanii (D'ORB.)  
Gyroidina umbonata (SILV.)  
Melonis padanum (PERCONIG)  
Melonis pompilioides (FICHT. e MOLL)

Come si può notare dall'elenco, la microfauna bentonica è leggermente meno diversificata rispetto a quella rinvenuta nei campioni della precedente località.

Le associazioni rinvenute sono correlabili con:

- "zona B" (VEZZANI, 1966), per la presenza di M. glabra e O. tenuicostata;
- probabilmente con la "zona a Globorotalia gr. crassaformis - subzona a Globorotalia aemiliana (COLALONGO & SARTONI, 1979), per la presenza di G.p. padana e per l'assenza di Uvigerina rutila.

Circa l'età delle microfaune analizzate valgono le stesse considerazioni fatte per la località Acquafredda.

#### Località Cammarda

Il residuo inorganico dei numerosi campioni analizzati è sempre quantitativamente abbondante e costituito essenzialmente da quarzo, feldspati e mica - in alcuni campioni il quarzo ed i feldspati prevalgono sulla mica -, nonché da alcuni frustoli carboniosi.

La frazione organogena è sempre, in misura maggiore o minore, scarsa e rappresentata prevalentemente da Foraminiferi; molto spesso si rinvencono anche frammenti di Lamellibranchi, talora frequenti, e rari resti di radioli di echino e di valve di Ostracodi; sporadicamente sono stati rinvenuti anche resti di Briozoi e piccoli Gasteropodi interi o in frammenti.

I gusci dei Foraminiferi sono sempre ben conservati.

I Foraminiferi planctonici, che risultano sempre nettamente subordinati rispetto a quelli bentonici, sono rappresentati dalle seguenti specie:

Globorotalia sp.

Globigerina bulloides D'ORB.

Globigerina concinna REUSS

Globigerina falconensis BLOW

Globigerina aff. falconensis BLOW

Globigerina aff. microstoma CITA, PREMOLI SILVA e ROSSI

Globigerina pachyderma (EHRENBERG)

Globigerina quinqueloba NATLAND

Globigerinoides aff. obliquus BOLLI

Globigerinoides ruber (D'ORB.)

Globigerinoides trilobus (REUSS)

Orbulina universa

Globigerinita glutinata

Nel benthos sono state riconosciute complessivamente le seguenti specie:

Textularia sp.

Bigenerina nodosaria D'ORB.

Dorothia gibbosa (D'ORB.)

Martinottiella sp.

Quinqueloculina sp.

Sigmoilopsis celata (COSTA)

Lenticulina rotulata (LAMARK)

Marginulina crebricosta SEG.

Orthomorphina tenuicostata (COSTA)

Sphaeroidina bulloides D'ORB.

Bolivina alata SEG.

Bolivina catanensis SEG.

Bolivina dilatata REUSS

Stilostomella monilis (SILV.)

Bulimina costata D'ORB.

Uvigerina longistriata PERCONIG

Uvigerina peregrina CUSCH.

Trifarina brady CUSH.

Gavelinopsis praegeri (HERON ALLEN e EARLAND)

Valvulineria bradyana (FORN.)

Ammonia beccarii (LINNE')

Elphidium crispum (LINNE')

Elphidium aff. macellum (FICHT. e MOLL)

Elphidium sp:

- Cribronion advenum (CUSH.)  
Protoelphidium granosum (D'ORB.)  
Planulina ariminensis (D'ORB.)  
Cibicides lobatulus (WALK. e JAC.)  
Cibicides pseudoungerianus (CUSH.)  
Cibicides ungerianus (D'ORB.)  
Cassidulina laevigata-carinata SILV.  
Globocassidulina subglobosa (BRADY)  
Nonion aff. boueanum (D'ORB.)  
Pullenia bulloides (D'ORB.)  
Gyroidina neosoldanii BROTZEN  
Gyroidina umbonata (SILV.)  
Melonis aff. depressulum (WALK. e JAC.)  
Melonis padanum (PERCONIG)

Come si può notare dall'elenco delle specie di Foraminiferi sia planctonici che bentonici, la microfauna rinvenuta è rappresentata soltanto da una parte delle specie riscontrate nelle località Acquafredda e Fornace e, più in particolare, risultano qui assenti le forme significative che nelle due precedenti zone hanno consentito di datare i terreni studiati.

Località Fornace e Masseria Pace (Potenza)

Contemporaneamente agli studi svolti nell'area precedentemente indicata sono state effettuate anche alcune indagini micropaleontologiche preliminari sui sedimenti pelitici, analoghi a quelli di Vietri di Potenza, affioranti nella città di Potenza e attribuiti genericamente al Pliocene medio (SERVIZIO GEOLOGICO D'ITALIA, F° 199 -Potenza-, 1969).

In particolare sono state campionate due cave, ubicate entrambe nel centro abitato di Potenza rispettivamente nelle località Fornace e Masseria Pace.

La frazione organogena presente è sempre quantitativamente scarsa o molto scarsa ed è costituita in prevalenza da Foraminiferi. Questi ultimi si presentano a luoghi (località Fornace) in cattivo stato di conservazione e con caratteri di nanismo.

Il rapporto plancton/benthos, a differenza di quanto si verifica per le argille di Vietri di Potenza, è sempre più o meno nettamente a favore del plancton. Quest'ultimo è rappresentato per la maggior parte da specie poco significative dal punto di vista bio- e cronostratigrafico. Le uniche forme indicative sono rappresentate da sporadici esemplari attribuibili a Globorotalia aemiliana (località Fornace) e a Globorotalia puncticulata padana (località Masseria Pace).

Inoltre in tutti i campioni esaminati Uvigerina rutila è costantemente assente.

La presenza del marker zonale consente di correlare le associazioni rinvenute con la "zona a Globorotalia gr. crassaformis - subzona a G. aemiliana" di COLALONGO e SARTONI (1979), prima in ordine di comparsa del Pliocene medio.

#### CONCLUSIONI

Il ciclo di sedimentazione infra-mesopliocenico, che si è sviluppato nell'area a sud-est del gruppo montuoso M.te Marzano-M.te Ognà tra Romagnano al Monte e la località Piani di Mauro, ha dato luogo alla deposizione di un limitato spessore di sedimenti, esclusivamente clastici e pelitici, che affiorano attualmente ad occidente dello spartiacque appenninico, ben all'interno della Catena.

Il substrato pre-pliocenico -il cui assetto è stato raggiunto in seguito alle principali fasi tettoniche del Miocene e del Pliocene inferiore- è costituito da alcune delle principali Unità stratigrafico-strutturali della Catena sud-appenninica, probabilmente in emersione dopo la fase tettonica del Pliocene inferiore.

Il contatto trasgressivo tra i livelli basali del ciclo pliocenico ed il substrato è particolarmente evidente quando esso si verifica sulle Unità carbonatiche della Piattaforma campano-lucana, ed è marcato dalla presenza di fori di liodomi nei carbonati del substrato e da livelli di ostreidi ed altri resti di molluschi nelle puddinghe basali della successione.

I conglomerati inferiori e le arenarie mostrano quindi chiari indizi di un rapido instaurarsi di condizioni marine, che si accentuano ulteriormente durante la sedimentazione degli intervalli più fini argillo-siltosi e marnosi. Successivamente, nella parte alta della serie si ha di nuovo sedimentazione clastica grossolana rappresentata prima da sabbie e quindi da conglomerati sabbiosi di ambiente litorale e, forse, supracotidale: con questi conglomerati regressivi si verifica la chiusura del ciclo in tutta l'area esaminata.

Nel periodo di massima espansione marina le caratteristiche sedimentologiche e paleontologiche delle peliti concordano nell'indicare un ambiente di sedimentazione caratterizzato da limitata profondità delle acque e normali valori di salinità. Le argille infatti presentano elevato contenuto sabbioso-siltoso e frustoli carboniosi, nonché microfaune a Foraminiferi prevalentemente bentonici ed associazioni di Lamellibranchi, Echinodermi, Gasteropodi, Briozoi, ecc., rappresentati da generi e specie indicativi di ambiente neritico e profondità delle acque non superiore ad alcune decine di metri.

Le microfaune a Foraminiferi bentonici ben sviluppate e differenziate testimoniano inoltre normali condizioni di ossigenazione al fondo del bacino. La scarsità dei Foraminiferi planctonici è da mettere probabilmente in relazione alle

condizioni batimetriche e fisiografiche di questa parte del bacino, di cui al momento non sono del tutto noti i rapporti con altri bacini marini più vasti e profondi.

La temperatura delle acque marine superficiali era probabilmente più elevata di quella che si osserva oggi alle nostre latitudini, perchè nelle associazioni di macrofossili sono presenti alcuni generi e specie di grossi Lamellibranchi (Panopea, Perna) i cui rappresentanti attuali sopravvivono nei mari di regioni tropicali o subtropicali. Inoltre, la costante presenza di Globigerinita glutinata e quella invece sporadica di forme decisamente "fredde", come Glogigerina pachyderma, fanno pensare ad un clima temperato-caldo.

La presenza di qualche sottile ed irregolare livello di gesso detritico e/o cristallino nelle argille sabbiose di località Fornace può essere dovuta, più che alla deposizione di solfati conseguenti all'instaurarsi di un episodico ambiente evaporitico, del quale non si osservano altre testimonianze, ad un apporto extraformazionale di terreni evaporitici altomiocenici facenti parte del substrato e che attualmente affiorano qualche decina di chilometri più ad ovest, nei dintorni di Contursi. Gli aggregati cristallini tabulari noti come "rosa del deserto", rinvenuti alla superficie dell'affioramento, hanno preso origine successivamente, per intensa evaporazione superficiale e conseguente risalita nei sedimenti di acque sature di solfati, in ambiente continentale arido.

L'attribuzione cronologica dei terreni di questo ciclo nell'area in oggetto ha sempre comportato qualche incertezza, dovuta alla difficoltà di rinvenire nei vari livelli, particolarmente quelli clastici basali, resti fossili cronologicamente significativi. I risultati delle analisi effettuate nelle successioni pelitiche di Vietri di Potenza indicano con sicurezza un'età riferibile al passaggio tra il Pliocene inferiore ed il Pliocene medio. Tale datazione è in accordo con i risultati di ricerche preliminari condotte dagli scriventi nei dintorni della città di Potenza su alcune successioni pelitiche attribuite alla porzione basale del Pliocene medio.

Risulta così confermata per le successioni plioceniche dei dintorni di Vietri di Potenza l'appartenenza allo stesso ciclo di sedimentazione che ha dato origine ad altre ben più potenti serie di terreni, affioranti in aree più esterne dell'Appennino meridionale tra il Molise e la Lucania; particolari analogie nell'evoluzione sedimentaria e paleoambientale si possono riconoscere nelle successioni del bordo occidentale del bacino di S. Arcangelo (VEZZANI, 1966; 1967), Ruvo del Monte (VEZZANI, 1968) ed in quelle della zona compresa tra Acerenza ed Avigliano (CENTAMORE et al., 1971).

I sedimenti clastici pliocenici presenti nell'area studiata rappresentano i lembi residui della deposizione avvenuta in un bacino che si è individuato dopo la fase tettonica del Pliocene inferiore, e nel quale si è verificata una in-

gressione marina dai settori orientali. In tale bacino si sono accumulati modesti spessori di sedimenti fino all'inizio del Pliocene medio, quando una generale regressione marina (forse connessa all'approssimarsi della nuova fase tettonica del Pliocene medio) pone termine alla sedimentazione.

Infine le successive fasi tettoniche plio-quadernarie che investono il bacino hanno causato lo smembramento dei depositi ed il sollevamento differenziale dei vari lembi, i cui residui affioramenti è possibile oggi osservare in un'ampia zona, sollevati talora a quote superiori a 1000 m come ad esempio al M.te Sierio, a sud-ovest di S. Angelo le Fratte.

#### BIBLIOGRAFIA

- AGIP MINERARIA (1957) - Foraminiferi padani (Terziario e Quaternario). Atlante Iconografico e distribuzione stratigrafica.
- BLOW W.H. (1969) - Late Middle Eocene to Recent planktonic foraminiferal biostratigraphy. In: Proceedings of the first international conference on planktonic microfossils. Geneva 1967, 1.
- BRADY H.B. (1884) - Report on the foraminifera dredged by H.M.S. Challenger during the years 1873-1876. Rep. Voy, Chal. Zool., 9, London.
- CENTAMORE E., CHIOCCHINI U., E. MORETTI A. (1971) - Geologia della zona tra Ace-  
renza e Avigliano (prov. di Potenza). Studi Geologici Camerti, 1.
- COLALONGO M.L. (1968) - Cenozona a Foraminiferi ed Ostracodi nel Pliocene e basso Pleistocene della serie del Santerno e dell'Appennino romagnolo. Giorn. di Geol., serie 2, 35, n. 3, Committee on Mediterranean Neogene Stratigraphy Proceedings of the fourth Session in Bologna, 19-30 September 1967, part. 3.
- COLALONGO M.L. e SARTONI S. (1979) - Schema biostratigrafico per il Pliocene ed il basso Pleistocene in Italia. In: Nuovi Contributi alla Realizzazione della Carta Neotettonica d'Italia. C.N.R. Prog.Fin.Geodinamica, Sottopr. "Neotettonica" pubbl. 251.
- COTECCHIA V. & DEL PRETE M. (1970) - Geologia dei dintorni di Vietri di Potenza e particolari caratteri d'instabilità dei versanti in flysch ed Argille Vari-colori. Geol. Appl. Idrogeol., 5, Bari.
- DALLAN L. & SALVATORINI G. (1968) - Biostratigrafia del Pliocene della Toscana marittima. Giorn. di Geol., serie 2, 35, n. 3, Committee on Mediterranean Neogene Stratigraphy Proceedings of the fourth Session in Bologna, 19-30 September 1967, part 3.
- DONDI L. & PAPETTI I. (1968) - Biostratigraphica zones of Po Valley Pliocene. Ibidem.
- D'ONOFRIO S. (1968) - Biostratigrafia del Pliocene e del Pleistocene inferiore nelle Marche. Ibidem.

- LENTINI F. (1969) - Sezioni stratigrafiche plioceniche nella Val d'Agri presso Gannano (Matera). Atti Acc. Gioenia Sc. Natur. in Catania, serie 6, 20, Suppl. Sc. Geol.
- RADINA B. (1966) - Note stratigrafiche e tettoniche sui dintorni di Vietri di Potenza e di Savoia di Lucania (Appennino meridionale). Boll. Soc. Natur. in Napoli, 74.
- SERVIZIO GEOLOGICO D'ITALIA (1969) - Carta Geologica d'Italia alla scala 1:100.000. F° 199 -Potenza-. Roma.
- SGROSSO I. (1967) - Tentativo di ricostruzione paleogeografica nella zona di Vietri di Potenza con particolare riguardo alla trasgressione miocenica. Boll. Sc. Natur. in Napoli, 75.
- VEZZANI L. (1966) - La sezione stratigrafica di Caliandro nel Pliocene medio-inferiore della Val d'Agri (Lucania). Riv. It. Paleont., 72, n. 1.
- VEZZANI L. (1967) - Il bacino plio-pleistocenico di S. Arcangelo (Lucania). Atti Acc. Gioenia Sc. Natur. in Catania, serie 6, 18, Suppl. Sc. Geol.
- VEZZANI L. (1968) - Stratigrafia dei terreni inframesopliocenici di Ruvo del Monte (Potenza). Boll. Acc. Gioenia, Catania, serie 4, 9.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una Commissione composta dai soci A. Scherillo, B. D'Argenio, G. Ghiara.



DALLA REVISIONE DEL GRANDE TERREMOTO "NAPOLETANO" DEL  
16 DICEMBRE 1857 UN CRITERIO DI ZONIZZAZIONE SISMICA

Nota di Maria Teresa QUAGLIARIELLO° & Giovanni NAPOLEONE°°

Presentata dal socio corrispondente Bruno D'ARGENIO

Adunanza del 6.11.1982

RIASSUNTO

Nell'ipotesi che un ruolo determinante si debba attribuire all'osservazione dei fenomeni "secondari", connessi con le variazioni di flusso dei fluidi nel mezzo poroso delle strutture idrogeologiche interessate dal grande terremoto che colpì il Napoletano (Vallo di Diano-Val d'Agri) nel 1857, il riesame delle conclusioni raggiunte da MALLETT nel suo dettagliato rapporto del 1862 conduce a ricostruire un nuovo schema della dinamica dell'evento principale. Se ne deduce la possibile ubicazione dell'epicentro, fissata da MALLETT a Caggiano (al margine settentrionale della struttura fluvio-lacustre plio-quadernaria del Vallo di Diano) e localizzata poi dal BARATTA in due sedi distinte, Caggiano e Montemurro (nel bacino della Val d'Agri). Sulla base delle condizioni idrogeologiche dell'area, ricostruite dai dati delle perforazioni, viene individuato un meccanismo a sostegno della superficialità dell'ipocentro, possibilmente ancor più esigua di quella originariamente fissata in 10 km. Il criterio sembra suggerire un motivo interpretativo della sismicità dell'Appennino associata alle strutture geologiche superficiali.

ABSTRACT

A review of the phenomena reported in connection with the Great Neapolitan Earthquake of 1857 shows MALLETT'S (1862) classical report and interpretation to be defective. From the major damage distribution and assuming that buildings cru-

- 
- ° - Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli
  - °° - Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Firenze

shed in the direction of propagation, he placed the epicenter at Caggiano, whereas by CLEMENTS method of transverse toppling the epicenter is more probably placed near Montemurro, some 50 km away. BARATTA suggested in 1901 two epicenters at Caggiano and Montemurro. The occurrence of two successive shocks suggests that two separate epicenters may have existed. While MALLETT mentioned changes in flow rate of springs he did not account for the detailed observations made in local chronicals. Major changes were noted in flow-rate both before and after earthquake. MALLETT'S estimate of a focal depth of 10 km cannot be substantiated; most major Italian earthquakes seem to originate not in the crystalline basement but in the cavernous limestone of the sedimentary cover (commonly repeated in superimposed thrust sheets). It is suggested that in this and other Italian earthquakes, hydraulic fracturing, following gradients in groundwater pressure, plays a decisive role, and that pressure changes may trigger multiple foci.

## INTRODUZIONE

### 1. PREMESSA

E' noto che in occasione dei terremoti più intensi sono state riportate variazioni di flusso alle sorgenti e più vistosi fenomeni idrogeologici superficiali come la formazione di laghi temporanei, a causa del drenaggio delle acque sotterranee per il fenomeno della fluidificazione del suolo (per es.: i terremoti dell'Alaska del 1964 di magnitudo  $M = 7.75-8.0$ , REIMNITZ et al., 1965; del Cile del 1960 con  $M = 8.25-8.50$ , SERGERSTROM et al., 1963; di Fukui del 1948,  $M = 7.2$ , TSUYA, 1950). Fenomeni di tal genere sono stati frequentemente elencati nella storia sismica di molte regioni del mondo; nella letteratura sismologica italiana in epoca pre-unitaria valgono, p.e., le diffuse formazioni lacustri temporanee che si ebbero in Calabria in occasione del terremoto del 5 febbraio 1783,  $M = 7$  (MALLETT, 1862). Ed è un fatto piuttosto singolare che nel corso dello sviluppo della sismologia non si annoveri un congruo numero di lavori in cui siteorizzano tali osservazioni sperimentali, fino a collegarle ai meccanismi crostali più superficiali che producono terremoti.

In realtà questi fenomeni sono stati considerati come effetti secondari dell'attività sismica. Con molta probabilità è stato determinante il fatto che Robert MALLETT, il primo grande studioso di sismologia di osservazione e scienziato molto influente, trascurasse, nel suo pur attento viaggio nell'Italia meridionale del febbraio 1858 dopo il terremoto del 16 dicembre 1857, le dettagliate osservazioni che gli venivano relazionate dalle persone responsabili del posto.

## 2. STATO DELLA RICERCA PER IL TERREMOTO DEL 1857

La mancata giusta valutazione dei fatti sperimentali è stata a lungo determinante; anche H.F. REID (1911) ha trattato come secondari fenomeni simili verificatisi col catastrofico terremoto di San Francisco ( $M = 8.3$ ). Eppure MALLET aveva avuto cura a Parigi di avvicinare RONDELET (famoso per la sua opera "L'art de bâtir") per ragguagliarsi circa i valori della tenacità tensile e della tenacità alla compressione, misurate per vari campioni di rocce diffuse nell'Italia meridionale; segnatamente, la tenacità tensile, che è così inferiore all'altra, avrebbe potuto indurre a considerare attentamente l'importanza dei fenomeni idrogeologici superficiali.

Lo stato della ricerca era tale che HOPKINS aveva non solo già evidenziato l'importanza delle onde rotazionali nella propagazione dei terremoti (HOPKINS, 1848) a cui si era opposto MALLET, ma aveva modificato il criterio di rottura dei materiali (HOPKINS, 1849; in JEFFREYS, 1962) che è comunemente indicato come criterio di Coulomb. DARCY nel 1856 aveva già sperimentato ed enunciato la legge sui mezzi filtranti che va sotto il suo nome.

Dai primi osservatori anche movimenti verticali furono riscontrati in occasione del terremoto del 1857, ma evidentemente non più rilevabili da MALLET in tempi successivi (a meno di accurate misure di livellazione di precisione, all'epoca impossibili).

Per l'impostazione del presente studio resta invece di fondamentale importanza il fatto che MALLET abbia dato notizie chiare e precise di strutture lacustri pleistoceniche come quella del Vallo di Diano, la Valle Atenate di Plinio e quella della Val d'Agri nella regione da lui attraversata. E di fondamentale importanza resta inoltre il fatto che DE LORENZO (1898), in un concorso a premio indetto dalla Reale Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, avente come tema: "Studi geologici su grandi laghi quaternari della Basilicata", abbia fatto menzione non soltanto del lago del Fucino, all'epoca appena prosciugato, "che ricorda assai prossimamente i nostri laghi quaternari" e per il quale MALLET aveva incidentalmente osservato un gap sismico, ma anche delle strutture lacustri dell'Appennino centro-settentrionale, già allora oggetto di studio esauriente da parte di DE STEFANO (1892; in DE LORENZO, 1898).

Quindi è nostro obiettivo oggi interpretare nell'area mesosismica del grande terremoto in esame, il ruolo della Fossa Bradanica e di queste due importanti strutture idrogeologiche, Vallo di Diano e Val d'Agri, separate dallo spartiacque dei M.ti della Maddalena e costellati di sorgenti, doline ed inghiottitoi carsici, al fine di evidenziare l'interdipendenza tra le depressioni lacustri in particolare, le strutture idrogeologiche in generale e la sismicità superficiale.

D'altra parte è noto che, avanti che NAKANO proponesse modelli matematici (in

BULLEN, 1963) per l'interpretazione del primo movimento desunto dai sismogrammi, LA BOZZETTA (1916) aveva interpretato tali osservazioni, ottenute dalla lettura delle registrazioni depositate all'Ufficio Centrale di Meteorologia di Roma con sismografi a piccolo periodo per il terremoto del Fucino del 15 gennaio 1915 ( $M=6.9$ ), per ricavarne che si trattasse di un terremoto di sprofondamento. Sembra piuttosto singolare che fino ad oggi tale interpretazione non sia assolutamente ricorrente e che persino i terremoti di Denver siano interpretati in termini di faglia trascorrente destra, indice dell'enorme influenza nell'interpretazione dei terremoti alla faglia di San Andreas. Eppure RICHTER (1958) ha in modo brillante sottolineato che faglia e terremoto non sono legati dalla legge di gravitazione universale!

### 3. RUOLO DEI FLUIDI NELLA DINAMICA CROSTALE

E' sembrato interessante procedere ad una revisione del terremoto del 1857, oggi che si posseggono dati di perforazioni profonde, al fine anche che maggiore interesse venga dato, nello studio strumentale dei terremoti (nell'interpretazione sia del meccanismo che della migrazione degli ipocentri), alle strutture idrogeologiche e particolarmente alle caratteristiche del flusso dei fluidi in profondità, così da meglio comprendere il comportamento geologico delle strutture crostali. Nella letteratura sismologica attuale un interessante contributo alla metodologia della soluzione del meccanismo al fuoco è stato apportato dalla scuola canadese (ROBSON et al., 1968), introducendo la pressione di fluido di poro nell'equazione per la determinazione dei piani di faglia e quindi dello stato degli sforzi.

Sembra quindi più realistico negli studi di dinamica crostale, qualunque sia la frequenza del moto, attribuire più importanza alla fluttuazione dei fluidi intercrostali. In effetti, nell'ambito delle strutture geologiche dell'Appennino meridionale, nello studio dell'interazione tra il moto del mare e la deviazione della verticale apparente in stazioni costiere, nell'ipotesi che falde acquifere superficiali e profonde siano influenzate dal mare, si è ottenuto un più significativo diagramma vettoriale rappresentativo dei due fenomeni, modificando l'espressione dell'effetto del solo carico dovuto all'acqua del mare (LO BASCIO & QUAGLIARIELLO, 1968). In termini di meccanica del flusso dei fluidi nei mezzi porosi (SCHEIDEGGER, 1960) è stato interpretato il movimento verticale lento nei Campi Flegrei (OLIVERI & QUAGLIARIELLO, 1969), la formazione delle caldere (OLIVERI & QUAGLIARIELLO, 1970), mentre una conferma sperimentale dell'interpretazione del bradisismo flegreo è fornita da studi successivi (CASERTANO et al., 1974; 1976).

## REVISIONE DELL'UBICAZIONE DEL TERREMOTO DEL 1857 E SUO SIGNIFICATO PER UN CRITERIO DI ZONIZZAZIONE

L'epicentro della scossa principale del grande terremoto napoletano del 1857 fu determinato da MALLETT in corrispondenza di Caggiano, in Vallo di Diano, e l'ipocentro ad una profondità di 10 km. Nel 1933, in occasione del terremoto di Long Beach, la correzione dell'applicazione del metodo usato da MALLETT -effettuata da CLEMENS e riportata da RICHTER (1958) - e consistente nel considerare proprio le onde rotazionali quelle agenti sui manufatti e quindi indirettamente i relativi sforzi tangenziali, ha permesso di ubicare il terremoto napoletano presso il villaggio di Montemurro, in Val d'Agri, all'altra estremità dell'area megasismica.

Resta però da sottolineare che nell'esposizione di MALLETT è ricorrente l'informazione da lui avuta della successione di due scosse. L'interpretazione di un terremoto come due scosse successive è stata molto ricorrente nella letteratura sismologica fino a che le onde "S" non furono identificate da OLDAM nei sismogrammi (BULLEN, 1963). Per il terremoto del 1857 le informazioni erano ovviamente solo macrosismiche e raccolte anche vicino all'epicentro: perciò non è possibile che siano state avvertite in tempi molto distanziati le onde rotazionali da quelle irrotazionali. Quindi la possibilità che effettivamente siano state due le scosse - ed eventualmente una ubicata a Caggiano, o nei pressi e comunque in Vallo di Diano, ed un'altra a Montemurro in Val d'Agri, come indipendentemente dedotto da BARATTA (1901) - resta una eventualità che, interpretata secondo la dinamica relativa alla idrogeologia profonda, si potrebbe pure spiegare supponendo che le due strutture siano interconnesse.

Un esempio in tempi più vicini dell'importanza dell'idrologia profonda potrebbe essere la nota serie dei terremoti verificatisi a Denver, Colorado (HEALY et al., 1968). A Denver infatti gli ipocentri si sono andati spostando nel tempo, dal pozzo d'iniezione verso il South Platte River, dove si sono avute le scosse di magnitudo maggiore. Questo fatto sperimentale si può interpretare probabilmente secondo un iniziale propagarsi delle scosse a causa di un gradiente idraulico dipendente dagli alti valori della pressione a fondo pozzo ed al valore probabilmente costante della pressione di strato considerata sub-idrostatica (SNOW, 1968), mentre si può supporre che le scosse di magnitudo maggiore, verificatesi allorchè erano terminate le operazioni al boccapozzo, siano avvenute sotto un gradiente idraulico differente per le diverse condizioni della pressione idraulica negli strati sottostanti il South Platte River.

La profondità del grande terremoto del 1857, stimata da MALLETT in ragione di 10 km, può considerarsi solo indice di notevole superficialità come in genere si verifica nell'Italia peninsulare (CALOI et al., 1968; CAPUTO & POSTPISCHL, 1975).

JEFFREYS (1962) ha suggerito che molti dei terremoti normali, praticamente tutti quelli usati per ottenere i tempi di percorso per i terremoti europei fino al 1954, avvennero negli strati superficiali e sono connessi alla distribuzione degli sforzi risultanti dall'incisione delle valli profonde. D'altro canto ancora oggi la stima della profondità ipocentrale resta problematica (JAMES et al., 1969): si è portati in genere ad attribuire profondità piuttosto rilevanti e l'esempio potrebbe ancora considerarsi la serie dei terremoti a Denver, a cui furono inizialmente attribuite profondità di 45 km, per poi giungere, allorchè furono poste 64 stazioni su un'area di 35 kmq, alla determinazione di 5 km di profondità con un errore di 300 m nel piano orizzontale e 500 m nel piano verticale.

#### FENOMENI IDROGEOLOGICI SUPERFICIALI CHE PRECEDETTERO E SEGUIRONO IL TERREMOTO

Le osservazioni idrogeologiche superficiali raccolte riguardano i centri abitati intorno alla Val d'Agri. La ragione di ciò è dovuta al particolare momento politico che attraversava l'Italia meridionale. Mentre nella regione interna la Società Economica della Basilicata era operante (ed infatti le notizie furono raccolte dal Segretario Generale della Società, Raffaele Battista), nella parte costiera invece era stata interrotta la pubblicazione del giornale "Il Piacentino", organo della Società Economica Salernitana.

A Pertosa, ubicata alle falde del massiccio calcareo degli Alburni a nord-ovest del Vallo di Diano fu osservato che per quattro o cinque giorni dopo il 16 dicembre sia il volume delle acque del fiume Tanagro che delle acque carsiche provenienti dalla grotta di S. Michele, era visibilmente diminuito in ragione di più di un quarto del precedente valore. La portata della caverna, nel febbraio 1858, si manteneva ancora minore della portata prima del terremoto.

A Potenza e comuni adiacenti, un mese prima del terremoto, in molti pozzi il volume dell'acqua era notevolmente diminuito e molti pozzi erano completamente secchi. Dopo il terremoto l'acqua delle sorgenti aumentò notevolmente di portata ed aumentò anche la portata dei fiumi adiacenti.

A Tito le sorgenti sulfuree ferrose e comuni furono secche per breve tempo prima del terremoto e successivamente divennero copiose, più dense di sedimenti e, quelle sulfuree, anche più calde.

A Marsico, i fiumi e le sorgenti aumentarono di portata ed alcune sorgenti emisero esalazioni solfuree. Furono anche osservati sollevamenti ed abbassamenti del suolo.

A Moliterno, fu osservato un aumento di portata ad una sorgente; a Grumento Nova, un aumento di portata del fiume Agri.

A Montemurro, furono osservati fanghi per un notevole spessore ed acqua di drenaggio.

#### CARATTERISTICHE IDROGEOLOGICHE DESUNTE DALLE PERFORAZIONI PROFONDE

Dalle perforazioni profonde, effettuate nell'area mesosismica del terremoto in esame, si desume che livelli argillosi pliocenici e quaternari sono presenti mediamente fino alla profondità di 1.500 m, con un valore minimo a Brindisi di Montagna di 780 m ed un valore massimo a Campomaggiore di 2.515 m. Lo spessore delle argille, e la profondità del tetto dei calcari su cui poggiano, ha un andamento significativo, presentando un valore di 1.870 m presso Tramutola che arriva a 2.250 m a Calvello e a 1.050 m a Pignola (o Vignola), tutte nell'area della prima isosisma, per assottigliarsi poi nell'area della seconda isosisma a Brindisi di Montagna e presentare il massimo spessore a Campomaggiore.

Le misurazioni di pressione di strato, effettuate in epoche diverse che vanno dal 1964 al 1969, pur considerando che sono state effettuate con precisione diversa dai vari operatori, presentano questa caratteristica: le pressioni di fluido di poro, sia nei livelli ricchi in argille che in quelli più profondi calcarei, sono maggiori in pozzi dell'area della prima isosisma che non in quella della seconda. Sarebbe quindi la prova che la circolazione dei fluidi può considerarsi centrifuga dall'area della prima isosisma verso l'esterno, cioè verso la Fossa Bradanica. Non è mai stata rilevata pressione anormale.

#### ESTENSIONE ALLE ALTRE AREE SISMICHE DELL'APPENNINO DEL CRITERIO DI ZONIZZAZIONE PER IL TERREMOTO DEL 1857

La sismicità dell'Appennino in relazione alle strutture tettoniche, riconosciute dalle immagini di satelliti, è associabile a bande regionalmente orientate che identificano tre regioni ad orientamenti differenziati (BOCCALETTI et al., 1980). Ma collegamenti più stretti si sono riscontrati tra attività sismica e strutture appenniniche intermontane dei bacini fluvio-lacustri plio-quaternari. Nell'Appennino meridionale la sismicità più significativa è riconoscibile in corrispondenza dei maggiori bacini intermontani - quali il Vallo di Diano, Val d'Agri, Valle del Mercure e del Noce (DE SENA, 1974) - e dove è inoltre evidente che il 37% di tutte le scosse prodottesi negli ultimi due secoli interessa strutture lacustri sicuramente identificate (CALCAGNILE et al., 1977).

Sembra opportuno, a riprova della connessione tra sismicità e bacini intermontani, considerare alcuni allineamenti sismici già messi in evidenza nell'Ap-

pennino settentrionale e centrale (CALOI et al., 1969; CAPUTO & POSTPISCHL, 1975). L'Appennino settentrionale presenta l'allineamento più notevole nella direzione Sarzana-Rimini ed è qui chiara la successione dei bacini di Sarzana, Lunigiana, Garfagnana, Mugello e di altre valli alluvionali minori, anch'esse strutture idrogeologiche unitarie.

Nell'Appennino centrale, infine, l'allineamento sismico Ancona-Anzio è caratterizzato dalla successione di bacini lacustri plio-quadernari in corrispondenza del M.te Vettore, del Bacino di Gubbio e della Valle Tiberina, del Bacino di Perugia e della Val Nerina, del lago olocenico di Norcia. L'allineamento sismico Val d'Arno-Matese è anch'esso caratterizzato dalla successione dei bacini lacustri plio-quadernari di Val d'Arno, Val di Chiana, Fucino, Valle del Liri, Valle del Tammaro.

Da queste evidenze emerge la possibilità di ottenere una più fine interpretazione spazio-temporale della sismicità se si considerano anche strutture lacustri più piccole e quindi le possibili connessioni idrogeologiche tra le strutture adiacenti in relazione alla successione temporale ed all'estensione delle aree mesosismiche.

#### CONCLUSIONI

L'attività sismica nell'Appennino è stata bene documentata solo raramente e nei tempi più recenti solo poche aree sono state analizzate con un'accuratezza sufficiente ad avanzare ipotesi di zonizzazione generalizzata. Anche i terremoti più intensi (e perciò meglio descritti) nel passato più o meno recente mostrano lacune decisive che non permettono analisi quantitative sui meccanismi e sull'evoluzione della sismicità in rapporto ai parametri fisici che la regolano. Il grande terremoto napoletano del 1857 che, per l'accuratezza e la mole notevole dei dati raccolti con un criterio strettamente scientifico, ha segnato l'inizio della sismologia osservazionale, è quello che ancor oggi ha fornito gli elementi per un riesame interpretativo che possa chiarirne i processi generativi. Ed è perciò che questo contributo allo studio dei terremoti in Italia cerca di suggerire, come conseguenza della discussione dei fatti esposti, la necessità che studi sperimentali e teorici vengano effettuati sui problemi della genesi dei terremoti in generale, e della zonizzazione sismica in particolare, su una più realistica interpretazione delle aree macrosismiche ed infine studi sulla previsione dei terremoti con carattere deterministico anziché probabilistico.

Il terremoto del 1857 produsse i suoi effetti più intensi in un'area comprendente due strutture geologiche delimitate da sistemi di faglie che segnano la notevole dislocazione delle unità stratigrafico-strutturali meso-cenozoiche e della loro copertura argillo - sabbiosa pli-quadernaria. L'area megasismica si

distribuisce su una struttura idrogeologica in cui pozzi profondi hanno permesso di verificare una circolazione centrifuga dei fluidi. Col terremoto del 1857 tali fluidi diedero luogo a manifestazioni, cosiddette "secondarie", prima e dopo l'evento principale il quale d'altra parte si verificò probabilmente in due centri distanti 50 km ed a profondità di pochissimi chilometri. Effetti indiretti dell'azione dei fluidi circolanti nel mezzo poroso sono stati evidenziati nello studio dei moti lenti crostali, sia come deviazione della verticale apparente sia come oscillazione bradisismica.

Ne consegue che la convergenza di osservazioni ed induzioni riguardanti i singoli bacini lacustri ciascuno dei quali può essere considerato come un corpo geologico unitario, che sono tipicamente distribuiti lungo l'intera penisola italiana, possano essere considerati il nucleo interpretativo di un modello sismotettonico di cui necessitano verifiche più complete e dettagliate. Osservazioni sperimentali in questo quadro sono appena iniziate (NAPOLEONE et al., 1981, in preparazione; OLIVERI et al., 1981, in preparazione) in condizioni di sismicità naturale, mentre anche quella indotta fornisce una convalida al criterio di zonizzazione conclusivo di questa interpretazione.

Dalle conseguenze esaminate, la decisione di applicare tale criterio ad alcune aree sismiche della penisola italiana pone in essere la necessità di individuare l'andamento delle linee di flusso e l'eventuale interconnessione di strutture idrogeologiche con dati reperibili mediante indagini dirette, in modo da consentire una migliore interpretazione dell'attività sismica nello spazio e nel tempo.

#### NOTA AGGIUNTA

Durante la stesura di questo lavoro si è verificato il terremoto del novembre 1980 in area attigua a quella in studio. Anche questo terremoto è ubicato in area caratterizzata da bacini lacustri. Si è potuto osservare, dalle misure di pressione di strato effettuate in pozzi trivellati nell'area delle isosisme più intense che, come per l'area entro la I isosisma del terremoto del 1857, i valori di pressione di strato sono maggiori di quelli misurati in pozzi ubicati nell'area esterna.

Inoltre, anche per il terremoto del 23 novembre 1980, sia dalle osservazioni microsismiche che da quelle macrosismiche, sembrerebbe potersi affermare che la scossa sia stata multipla.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano vivamente l'Ing. Capo Elvezio Messina e l'Ing. Luigi Romano dell'Ufficio Nazionale Minerario per gli Idrocarburi -Sezione di Napoli- per aver messo a disposizione i log dei pozzi perforati, il cui studio è stato essenziale per la compilazione del presente lavoro ed averne con interesse seguito lo sviluppo.

BIBLIOGRAFIA

- BARATTA M. (1901) - I terremoti d'Italia. Bocca, Milano, pp. 950.
- BOCCALETTI M., COLI M. & NAPOLEONE G. (1980) - LANDSAT lineation pattern in the Apennines and its geodynamic significance. *Modern Geology*, 7, 95-103.
- BULLEN K.E. (1963) - An introduction to the theory of seismology. Cambridge Univ. Press, pp. 381.
- CALCAGNILE G., DEL PRETE M., MONTERISI L. & PANZA G.F. (1977) - Seismic risk of Basilicata in its geostructural frame. *Boll. Geof. Teor. Appl.*, 19, 117-139.
- CALOI P., COLADONATO U. & SPADEA M.C. (1969) - Sismicità in relazione alla tettonica e accumulo delle tensioni elastiche nella regione abruzzese nel periodo 1900-1970. *Ann. Geof.*, 22, 309-357.
- CAPUTO M. & POSTPISCHL D. (1975) - Seismicity of the Italian region. In: "Structural Model of Italy", OGNIBEN et al. (eds.), C.N.R., pp. 502.
- CASERTANO L., OLIVERI DEL CASTILLO A. & QUAGLIARIELLO M.T. (1974) - Terremoti, bradisismo e moti del mare a Pozzuoli. *Atti Acc. Pontaniana*, 23, 123-136.
- CASERTANO L., OLIVERI DEL CASTILLO A. & QUAGLIARIELLO M.T. (1976) - Hydrodynamics and geodynamics in the Phlaegrean Fields area of Italy. *Nature*, 264, 161-164.
- DE LORENZO G. (1898) - Reliquie dei grandi laghi pleistocenici nell'Italia meridionale. *Atti Acc. Sc. Fis. e Mat.*, ser. 2, 9, 1-74.
- DE LORENZO G. (1904) - Geologia dell'Italia Meridionale. Napoli, pp. 326.
- DE SENA E. (1974) - Un nuovo modello concettuale per la sismicità dei laghi pleistocenici nell'Appennino meridionale. Tesi di Laurea, Univ. Napoli, pp. 109.
- HEALY J.H., RUBEY W.W., GRIGGS D.T. & RALEIGH C.B. (1968) - The Denver earthquakes. *Science* 161, 1301.
- HOPKINS W. (1848) - Report on the geological theories of elevation and earthquakes. *Brit. Ass. Rpt.*, 33-92.
- JAMES D.E. (1969) - On location of local earthquakes using small networks. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 59, 1202-1212.
- JEFFREYS Sir. H. (1962) - The Earth. Its origin and physical constitution. Cambridge Univ. Press, pp. 438.

- LA BOZZETTA R. (1961) - A proposito della direzione e del senso della prima semionda del terremoto catastrofico del 13 gennaio 1915. Boll. Soc. Sism. It., 20, 205-224.
- LO BASCIO A. & QUAGLIARIELLO M.T. (1968) - Risultati ottenuti dallo studio della deviazione apparente della verticale alla stazione di Napoli. Ass. Geof. It., Atti 17 Conv. Ann., 441-457.
- MALLET R. (1862) - Great Neapolitan Earthquake of 1857. The first principles of observational seismology as developed in the report to the Royal Society of London of the expedition made by command of the Society into the interior of the kingdom of Naples, to investigate the circumstances of the great earthquake of dicembre 1857. 1-2, Chapman & Hall, London.
- OLIVERI DEL CASTILLO A. & QUAGLIARIELLO M.T. (1969) - Sulla genesi del bradisismo flegreo. Atti Ass. Geof. It., 18° Conv. Napoli.
- OLIVERI DEL CASTILLO A. & QUAGLIARIELLO M.T. (1970) - Proposta di un meccanismo di formazione delle forme crateriche (Maaren, crateri, caldere). Boll. Soc. Natur. in Napoli, 79, 49-57.
- REID H.F. (1911) - The elastic-rebound theory of earthquakes. Bull. Dept. Geol. Univ. California, 6, 413-444.
- REIMNITZ E. & MARSHALL N.F. (1965) - Effects of the Alaska earthquake and tsunami on recent deltaic sediments. Journ. Geoph. Res. 70, 2363-2376.
- RICHTER C.F. (1958) - Elementary seismology. Freeman, S. Francisco, pp. 768.
- ROBSON G.R., BARR K.G. & CANALES L.L. (1968) - Extension failure: an earthquake mechanism. Contr. Dom. Obs. Ottawa, 8, 14.
- SCHNEIDEGGER A.E. (1960) - The physics of flow through porous media. Univ. Toronto Press, pp. 313.
- SEGERSTROM K., CASERTANO L., & GALLI C. (1963) - Eruptions of water and sands resulting from an earthquake near Conception, Chile. U.S. Geol. Sur., Prof. Paper 475-8.
- SNOW D.T. (1968) - Fracture deformation and changes of permeability. Quart. Jour. Col. Sc. Mines, 63, n. 9, 201-242.
- TSUYA H., (ed.), (1950) - The Fukui earthquake of June 28, 1948. Report of the Special Committee for the Fukui earthquake. pp. 197.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una Commissione composta dai soci A. Scherillo, G. Ghiara e B. D'Argenio.



NUOVE CONSIDERAZIONI SUL TERRAZZO MARINO DE "LA STARZA"

PRESSO POZZUOLI

Nota di Valeria ZAMPARELLI°, Ludovico BRANCACCIO°, Pio DI GIROLAMO°°

Presentata dal socio ordinario Bruno D'ARGENIO

Adunanza dell'11.12.1982

RIASSUNTO

Il terrazzo de "La Starza" presso Pozzuoli corrisponde ad una spianata di accumulo di depositi da pyroclastic fall, che ricalca la sottostante superficie dei depositi marini ben noti in letteratura che si trova all'altezza di 35 m sul livello del mare. L'età di questi sedimenti è compresa tra 4100 e 3600 anni fa, come è testimoniato dalla presenza di prodotti del vulcano di Astroni; la fauna in essi presente, attribuita al "Tirreniano", in effetti è molto più recente. Ad est di Pozzuoli, in località Gerolomini, l'età dei sedimenti marini è più antica, dato che sono presenti prodotti provenienti dal vulcano di Agnano e la loro altezza massima è di 10 m s.l.m. Ad ovest de "La Starza", verso Arco Felice, l'altezza massima non supera i 28 m.

Tenendo conto del fatto che già all'inizio dell'era Cristiana l'area del Serepeo, con cui il terrazzo de "La Starza" è solidale era a +4 m s.l.m. nell'intervallo di tempo compreso fra 4100 (o 3600) e 2000 anni fa, la velocità di sollevamento del terrazzo è stata di 1.9-2.4 m per secolo a Stazione Cantiere presso Pozzuoli e di 1-1.4 m per secolo ad ovest di Pozzuoli presso Arco Felice. Ad est, per i depositi più antichi di Gerolomini, la velocità è, sempre fino all'inizio dell'era Cristiana, compresa tra 0.16 e 0.8 m per secolo.

Ne emerge un quadro deformazionale caratterizzato da massimi sollevamenti e massime velocità a Pozzuoli, decrescenti verso est e verso ovest. Esso corrisponde anche al modello di deformazione dell'ultimo evento bradisismico, con una sorprendente coincidenza degli assi della deformazione stessa.

---

° - Istituto di Geologia e Geofisica dell'Università di Napoli

°° - Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli

Viene anche messo in evidenza che nella zona di Pozzuoli, di fronte alle velocità di sollevamento di 1.9-2.4 m/secolo per l'intervallo compreso tra 4100 e 2000 anni fa, è corrisposta una velocità media di poco più di 1 m per secolo tra 2000 anni fa ed il presente. Si tratta, in sostanza, di un trend decisamente decrescente.

#### SUMMARY

The terrace "La Starza" near Pozzuoli (Naples, Italy) is the surface of "pyroclastic fall" deposits of the neighbouring volcanoes; it follows the underlying morphology of marine deposits at 35 m above sea level. The age of these marine deposits is 4000-3600 years b.p., as Astroni products are included in them. So their mollusks and foraminifera fauna, called "Tyrrhenian" is in fact very recent. The marine terrace has the same age to the west, at Arco Felice, and the height of 28 m above sea level. On the contrary, the age of the marine terrace is increasing to the east (11.000-4.000 b.p. at Gerolomini with Agnano volcano products); and it is at 10 m above sea level. As the area, "Serapeo" included, was 4 m above present position 2000 years ago, we calculated an uplift velocity of 1.9-2.4 m/century at Pozzuoli, 1-1.4 m west of Pozzuoli (Arco Felice) and 0.16-0.8 m/century east of Pozzuoli (Gerolomini) for the time interval within 2000 years ago. On the contrary, main velocity of the movement was, between 2000 years ago and today, 1 m/century at Pozzuoli. The deformational frame of this uplifting is the same of the recent bradyseismic movement at Pozzuoli (1970).

#### 1. PREMESSA

Negli ultimi anni disastrosi eventi naturali, soprattutto sismici, hanno riportato in primo piano, tra i recenti indirizzi della ricerca geologica, i problemi inerenti i movimenti recenti della crosta.

In questo quadro, ed in un'area particolarmente sensibile ai movimenti bradyseismici quale quella flegrea, ci sembra importante rivedere la posizione cronostatigrafica del terrazzo marino de "La Starza" presso Pozzuoli, pur ampiamente citato dalla letteratura geologica esistente, dato che la sua corretta collocazione cronologica consente di fare una serie di importanti considerazioni sulla entità spazio-temporale dei movimenti recenti nell'area flegrea.

#### 2. IL QUADRO GEO-VULCANOLOGICO E PETROLOGICO

I prodotti affioranti nei Campi Flegrei, come è noto, sono costituiti preva-

lentemente da vulcanoclastiti; più precisamente da piroclastiti da fall (pomici e ceneri, scorie saldate e brecce in strati e banchi), piroclastiti da flows (ignimbriti, mud flow), da surge e da epiclastiti. Molto rari sono gli episodi lavici (cupole esogene) tanto che l'indice di espansività è altissimo, praticamente pari al 100%. Tali prodotti derivano in buona parte dall'attività di un gran numero di piccoli edifici vulcanici semplici (circa 30 solo sulla terraferma).

L'associazione petrografica (serie alcalino-potassica debolmente sottosatura) è dominata da termini differenziati sialici ricchi in gas che vanno da trachiti alcaline a trachiti a tendenza più o meno fonolitica; più rari sono i tipi latitici ed i capostipiti shoshonitici ("trachibasalti" Auct.). Come rari inclusi si rinvencono anche termini di serie leucitica.

Il magmatismo flegreo è ad affinità orogenica: l'associazione quaternaria shoshonitica di superficie è stata preceduta da serie plio-pleistoceniche calcocaline dominate da lave andesitiche presenti solo in profondità nella zona immediatamente a nord dei Campi Flegrei (BARBIERI et al., 1979). Il substrato sedimentario, costituito dalle piattaforme carbonatiche mesozoiche (abruzzese-campana e campano-lucana) e sedimenti neogenico-quaternari sbloccati in strutture monoclinali nei termini più antichi (ORTOLANI & APRILE, 1979), si trova a profondità di km 2.5-3 per i termini carbonatici (CAMELI et al., 1975).

I magmi orogenici, che derivano da fusione parziale nel mantello alto (DI GIROLAMO et al., 1979), hanno dato, per l'associazione shoshonitica affiorante, fenomenologie esplosive a livelli subsuperficiali, prevalentemente a tetto delle piattaforme, con vari episodi freatomagmatici.

L'età delle vulcaniti affioranti (CASSIGNOL & FILLOT, 1982; ALESSIO et al., 1973) va da 30.000-5.000 anni fino, gradualmente, ai tempi recenti (M. Nuovo, 1538). Gli studi sulle aree lontane dai Campi Flegrei (DI GIROLAMO, 1968; 1970; DI GIROLAMO et al., 1972; BARBERI et al., 1978) mostrano che gli eventi vulcanici flegrei più significativi come esplosività e quantità di prodotti emessi sono l'ignimbrite campana (età 30.000 anni circa) e varie eruzioni di pomici ad essa sottoposte, il Tufo Giallo Napoletano (11.000 anni circa) e le pomici dei vulcani di Agnano e Astroni (11.000-4.000 anni). Il volume di prodotti emessi, e mediamente anche l'esplosività, è andato diminuendo nel tempo; l'ignimbrite campana si è deposta, con spessori di alcune decine di metri, su un'area di circa 10.000 km<sup>2</sup>.

In corrispondenza con tali episodi, in conseguenza della grande quantità di magmi emessi e della superficialità delle camere magmatiche, si sono avuti nei Campi Flegrei i principali fenomeni di sprofondamento vulcano-tettonici. I vari movimenti verticali corrispondenti a tali episodi, alla successiva risalita di fluidi e fusi magmatici ed a fenomeni bradisismici più localizzati e relativa-

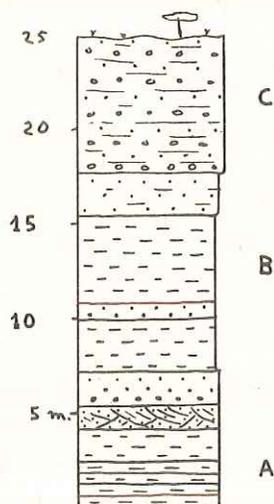


FIG. 1

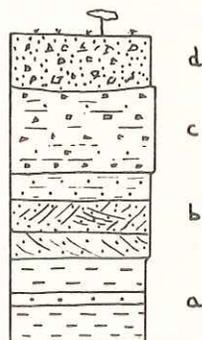


FIG. 2

Fig. 1 - La successione di La Starza affiorante presso la Stazione "Cantiere" della ferrovia Cumana. Il termine A, marino, è attribuibile ai prodotti del vulcano di Agnano; il B, anch'esso marino, al vulcano Astroni; il C, subaereo, al vulcano di Cigliano.

Fig. 2 - La successione di Gerolomini. I termini a e b, marini, sono costituiti da prodotti appartenenti al vulcano di Agnano. Anche il c, subaereo, è in relazione con il vulcano di Agnano. Il termine d, infine, proviene dal M.te Spina. Per le descrizioni litologiche delle figure 1 e 2 si veda il testo.

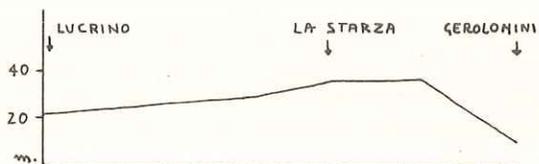


FIG. 3.

Fig. 3 - L'altezza del terrazzo marino de "La Starza" tra Lucrino e Gerolomini.

mente recenti (area di Pozzuoli) hanno dato luogo ad ingressioni e regressioni marine fino ad ora individuate ma non ben studiate.

La successione dell'attività vulcanica degli edifici più recenti (a tetto del Tufo Giallo Napoletano), collegati più direttamente con le indagini oggetto della presente nota, può essere così ricostruita: complesso vulcanico di Agnano, complesso di cupole laviche del sistema M. Olibano-Villa Cariati, vulcano della Solfatara, Astroni, Cigliano. L'età assoluta di tale sequenza vulcanica, in base ai dati finora noti, è compresa nei limiti 11.000-3.700 anni.

### 3. STUDI PRECEDENTI

La formazione de "La Starza" è stata studiata da numerosi autori fin dal secolo scorso per il notevole interesse che ha sempre suscitato in chiunque si sia occupato dei problemi geologici dell'area flegrea. Molti di questi autori si sono essenzialmente limitati a fornire degli elenchi della ricchissima fauna presente nel deposito ed a fare delle osservazioni paleontologiche (SCACCHI, PILLA, COSTA, DE ANGELIS D'OSSAT, MINUCCI, ecc.).

Altri invece (come LYELL, DE LORENZO, DELL'ERBA, PARASCANDOLA, MINIERI, FALINI, SINNO) si sono anche posti il problema della sua genesi, interpretandola in modo diverso, sempre però legata all'attività dei vari edifici vulcanici del 2° e 3° periodo flegreo. Negli anni sessanta RODRIQUEZ in un suo lavoro sulla Starza, in base ad osservazioni paleontologiche e morfologiche attribuisce un'età tirreniana alla formazione.

In molti lavori, inoltre, è citato il terrazzo de "La Starza"; in essi tuttavia non vengono analizzati nè il significato cronologico nè le implicazioni geodinamiche.

### 4. IL TERRAZZO DE "LA STARZA"

La superficie terrazzata de "La Starza" borda il golfo di Pozzuoli tra M.te Nuovo ad ovest e la cupola lavica di M. Olibano verso est, conservando in questo tratto un'identità morfologica che ne permette la facile individuazione. Ad ovest di M. Nuovo invece, proprio in relazione all'attività di questo centro vulcanico, che ha distrutto l'originaria continuità di questa superficie terrazzata, essa affiora soltanto in un piccolo lembo addossato alla collina di Tritoli, citato da vari autori.

Nella scarpata che margina il terrazzo verso il mare affiora una successione in parte marina in parte continentale; essa risulta molto importante ai fini dell'attribuzione cronostratigrafica del terrazzo, per cui viene qui di seguito descritta.

In località Gerolomini, ad est dell'abitato di Pozzuoli, la successione è caratterizzata da:

a) alla base, cineriti grigie con rare pomice bianche smussate ed appiattite, e qualche sottile livello sabbioso. Si rinvencono molti fossili, ben conservati ed in posizione naturale; la fauna è quella illustrata da RODRIQUEZ (1964);  
 b) segue un intervallo di sabbie vulcaniche, in alternanza grossolane e fini, con evidente laminazione incrociata, che a distanza orizzontale di qualche metro, diviene laminazione parallela. Verso l'alto predominano le laminazioni parallele; lo spessore è di 4 m circa.

L'ambiente di deposizione è quello caratteristico di una barra costiera, che passa lateralmente e verso l'alto ad una spiaggia. La quota massima di affioramento di questi depositi è di 10 m s.l.m.;

c) al di sopra, con un netto stacco litologico, ma in continuità stratigrafica, si rinviene una sequenza stratoide di pomice a granulometria variabile, con spigoli vivi, intercalate a livelli di ceneri, per uno spessore di 4,50 m. Si tratta di sedimenti subaerei, in cui peraltro sono anche leggibili orizzonti di pedogenesi embrionale; le caratteristiche sedimentologiche indicano una messa in posto del tipo pyroclastic fall;

d) a chiudere la serie vi è un deposito a tessitura caotica, con clasti e matrice d'origine vulcanoclastica, fortemente eterometrico che poggia sul c) con una superficie molto articolata d'origine talora erosionale. Si tratta di depositi da pyroclastic flow.

Dal punto di vista petrografico, tutta la successione vulcanoclastica descritta s'inquadra nel chimismo prevalente delle vulcaniti esplosive flegree, cioè da tipi trachitici alcalini a fonolitici.

La serie è sottoposta alle lave trachitiche costituenti la cupola di M.te Olibano.

Le evidenze stratigrafiche permettono di correlare tutta la sequenza descritta con l'attività esplosiva del complesso vulcanico di Agnano, ed in particolare le parti a, b, c, alle prime fasi di ritmi esplosivi emergenti alla base del complesso, e la parte d, all'attività di brecce e pyroclastic flow dell'apparato di M.te Spina (1).

Tutta la serie è di età superiore ai 3.800 anni (età assoluta della cupola di M. Olibano: CASSIGNOL & FILLOT, 1982); per quanto riguarda le età connesse direttamente con l'attività vulcanica di Agnano, sono da ricordare numerose datazioni  $C_{14}$  riferibili ad un evento vulcanico molto significativo del complesso

---

(1) - Le notizie riguardanti i prodotti di Agnano e di M.te Spina ci sono state fornite dal prof. Giuseppe Rolandi, dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Napoli, che ringraziamo sentitamente.

("pomici principali" Auct.), compreso tra 11.360 anni fa a letto e 8510 a tetto (ALESSIO et al., 1973). Pur attribuendo la successione di Gerolomini a questo range di tempo, sottolineando che l'attività del complesso vulcanico si è probabilmente protratta nel tempo oltre il limite superiore testè citato (8510 anni fa) non si può escludere che la serie abbia un'età compresa tra 8510 e 3800 anni fa.

Spostandosi verso ovest, presso la Stazione Cantiere della Ferrovia Cumana, la successione diviene sensibilmente diversa. Essa è costituita da:

- a) un intervallo caratterizzato da un livello cineritico alla base cui seguono sabbie vulcaniche gradate con laminazione incrociata, e con alcuni orizzonti induriti di colore rosso e giallo;
- b) al di sopra, numerosi banconi di cineriti grigie con rare pomice arrotondate, a luoghi molto ricche di fossili; ad essi sono intercalati alcuni livelli pomice e sabbiosi, talvolta con disposizione lentiforme per riempimento di canali. Nella parte superiore questo intervallo mostra una prevalenza di livelli sabbiosi, talora gradati e con laminazione incrociata, per terminare con un paleosuolo non sempre continuo;
- c) a chiudere la serie vi è infine un intervallo di pomice bianche stratificate, a spigoli vivi, che poggia sul termine precedente in sostanziale concordanza.

Le variazioni litologiche indicano chiaramente, nell'ambito degli intervalli a) e b) variazioni di profondità del bacino, forse attribuibili a movimenti bradisismici; l'intervallo c) è francamente subaereo.

Per quanto riguarda la provenienza dei prodotti ora descritti è da tener presente che la parte basale è con ogni probabilità correlabile alle piroclastiti da caduta dei Gerolomini (Agnano); i termini medio-alti marini, invece, corrispondono all'attività del vulcano di Astroni, il solo centro caratterizzato da una grande abbondanza di prodotti prevalentemente cineritici, che affiorano, in facies subaerea da base surge, verso monte in direzione nord-est. Tali prodotti,

---

Fig. 1 - La successione di La Starza affiorante presso la Stazione "Cantiere" della Ferrovia Cumana. Il termine A, marino, è attribuibile ai prodotti del vulcano di Agnano; il B, anch'esso marino, al vulcano Astroni; il C, subaereo, al vulcano di Cigliano.

Fig. 2 - La successione di Gerolomini. I termini a e b, marini, sono costituiti da prodotti appartenenti al vulcano di Agnano. Anche il c, subaereo, è in relazione con il vulcano di Agnano. Il termine d, infine, proviene dal M.te Spina. Per le descrizioni litologiche delle figure 1 e 2 si veda il testo.

Fig. 3 - L'altezza del terrazzo marino de "La Starza" tra Lucrino e Gerolomini.

ad alta energia di trasporto (facies di waves), sono arrivati in grande quantità grazie anche alla morfologia dolcemente degradante verso il mare.

La parte terminale, al di sopra del paleosuolo, è da attribuire all'attività esplosiva di Cigliano.

Le datazioni note in letteratura assegnano ad eventi molto significativi del vulcano età comprese nel breve intervallo tra 4070 e 3640 anni. Tali età possono considerarsi sostanzialmente coincidenti con l'attività del vulcano, dato che si tratta di un piccolo apparato monogenico.

Pur non essendo note in letteratura datazioni assolute riguardanti il Cigliano, tenendo presente il minimo contributo dei prodotti di tale vulcano alla sequenza de "La Starza", possiamo concludere che l'età di messa in posto della successione può essere riferita all'intervallo di tempo compreso tra 3600 e 4000 anni fa.

Spostandosi più ad ovest, verso Arco Felice, la successione si mantiene sostanzialmente analoga a quella de "La Starza", salvo che la parte basale a) non affiora più; del tutto simile è l'intervallo attribuito al vulcano de "gli Astroni", mentre diversa è anche la parte c): in questo caso infatti cominciano ad affiorare livelli pomicei e scoriacei di colore marrone, legati all'esplosione del M.te Nuovo. Varia anche l'altezza massima dei depositi marini affioranti, ma di questo si parlerà nel prossimo capitolo.

Bisogna infine ricordare che, più a nord di M.te Nuovo, in località "Teano", sono segnalati al di sotto del piano-campagna (22 m s.l.m.), fossili marini anch'essi, probabilmente, riferibili all'intervallo b) de "La Starza".

#### 4.1. Caratteristiche morfologiche del terrazzo de "La Starza"

Come si è detto precedentemente, la superficie terrazzata si estende da M.te Olibano al M.te Nuovo, a cavallo dell'abitato di Pozzuoli; essa è marginata verso il mare da una scarpata che ha tutti i caratteri morfologici di una falesia d'erosione marina successivamente evoluta per crolli spesso funesti data l'altissima densità di antropizzazione dell'area. La scarpata medesima è di frequente ricoperta alla base da un accumulo detritico continuo fortemente inclinato, legato appunto al su descritto meccanismo di arretramento della falesia, che maschera e ricopre il più delle volte i sedimenti a letto della successione marina de "La Starza".

Verso nord il terrazzo si appoggia al rilievo del M.te Gauro. Beninteso i rapporti giacitureali tra la successione marina e la collina suddetta non sono leggibili con chiarezza. Però è il tipo di contatto morfologico stesso a sugge-

rire una situazione giaciturale di questo genere: esso è caratterizzato da un netto knick basale all'accostamento tra le due unità morfologiche (terrazzo e rilievo del Gauro), appena ritoccato da piccoli talus detritici.

Verso nord-est e verso est il terrazzo si chiude ai piedi dei crateri di Cigliano e degli Astroni. Le osservazioni di carattere stratigrafico esposte nel precedente capitolo indicano un'età successiva al terrazzo per il primo ed un'età forse contemporanea per il secondo (gli Astroni). Anche in questo caso la morfologia conferma pienamente i risultati delle correlazioni stratigrafiche. Il contatto è infatti qui caratterizzato da un ampio raccordo concavo che indica inequivocabilmente importanti apporti dalle falde di questi vulcani, certamente non di tipo esclusivamente erosionale: l'attività di questi centri era, insomma, ancora viva, tanto da consentire il ricoprimento del terrazzo mediante un'ampia coltre di depositi piroclastici.

Inoltrandosi verso l'interno la superficie terrazzata sembra continuare fino alla Montagna Spaccata, dove, del resto, è stata segnalata da FALINI (1951) la presenza di livelli marini al di sotto dei prodotti della Montagna Spaccata stessa, nel corso della escavazione della galleria ferroviaria "Direttissima" Napoli-Roma. E' presumibile che, essendo il vulcano degli Astroni, i cui prodotti affiorano nella sezione di "La Starza" presso la Stazione Cantiere, più recente della Montagna Spaccata, i depositi marini sottostanti l'edificio della Montagna Spaccata possano corrispondere al marino da noi rinvenuto alle Terme Gerolomini, anziché a quello, più alto stratigraficamente, de "La Starza".

Verso ovest la continuità del terrazzo è interrotta dal M.te Nuovo, la cui età storica non lascia dubbi sulla lacerazione del terrazzo stesso avutasi in conseguenza dell'eruzione di questo vulcano. A tergo del M.te Nuovo, infatti, nel rione Teano, è segnalata la presenza di depositi marini, ascrivibili con ogni probabilità alla successione de "la Starza"; del resto, un altro lembo, riconosciuto, da vari autori, è quello ad ovest del lago Lucrino.

Interessanti considerazioni possono inoltre emergere dalle variazioni di altezza del terrazzo de "La Starza".

Nella sezione illustrata precedentemente, in località "Stazione Cantiere", il terrazzo ha un'altezza di 40 m; esso corrisponde, in realtà, alla superficie dei depositi subaerei del vulcano "Cigliano", dato che gli ultimi 5 m di sedimenti appartengono, come si è visto, all'attività esplosiva di detto vulcano. E' ovvio però che l'assetto orizzontale di questi prodotti ricalchi l'andamento di una sottostante superficie, quella dei depositi marini, questa sì definibile come terrazzo marino; essa è in fin dei conti pressochè orizzontale, come si può osservare lungo tutta la scarpata del terrazzo de "La Starza". Essa si rinviene dunque, nella sezione in questione, a 35 m sull'attuale livello del mare.

Ad ovest, e precisamente ad Arco Felice, la superficie del terrazzo è a 31 m

di altezza. Anche in questo caso esso corrisponde ad una superficie d'accumulo subaerea; lo spessore dei prodotti del Cigliano, cui si aggiungono in questa sezione anche altri prodotti di probabile origine del M.te Nuovo, non supera, in questo caso i 3 m circa; in tal modo la sommità dei depositi marini viene a trovarsi intorno a 28 m. Più ad ovest, nel lembo in località Tritoli presso il lago Lucrino, la superficie non supera i 22 m.

Situazione analoga si rinviene spostandosi verso est, dove nella sezione Terme La Salute, località Gerolomini, i depositi marini si trovano ad un'altezza massima di 12 m, e corrispondono peraltro alla parte bassa de "La Starza". In questa sezione la spianata del terrazzo morfologicamente individuabile, che si trova a circa 40 m, è dunque molto più alta della superficie terminale dei depositi marini, dato che su di essa si rinviene tutto il complesso delle pomici e ceneri ritmicamente alternate di Agnano ed, inoltre, il flow piroclastico del M.te Spina nonchè verso l'interno, i depositi de "La Solfatara".

In conclusione dunque si può riassumere che la superficie dei depositi marini del terrazzo de "La Starza" varia da un'altezza di 22 m s.l.m. ad ovest, attraverso i 35 m di Stazione Cantiere, ai 12 m di Terme La Salute in località Gerolomini, nella quale peraltro i depositi stessi sono anche più antichi.

##### 5. CONSIDERAZIONI SUI MOVIMENTI RECENTI

E' interessante rivedere e collocare nella giusta posizione l'età dei depositi marini de "La Starza". Stando alle considerazioni fatte da RODRIQUEZ (1964) che ne ha studiato la fauna, essi vengono attribuiti, sia pure in via dubitativa, al Tirreniano. Però, scorrendo l'elenco della fauna determinata dall'autore, non compaiono specie particolarmente significative di questo piano marino; tutt'al più, come del resto l'autore stesso mette in evidenza, l'associazione faunistica indica vagamente un clima temperato-caldo.

Ora, esclusa questa attribuzione non suffragata da dati biostratigrafici incontrovertibili, sembra chiaro che la giacitura stessa dei depositi, a tetto del Tufo Giallo Napoletano, la cui età assoluta si aggira intorno agli 11.000 anni, esclude di per sè un'età tirreniana della successione de "La Starza". In particolare, come già detto precedentemente, nelle successioni esaminate si rinvennero i prodotti del vulcano di Agnano in facies marina e subaerea ad est di Pozzuoli (Gerolomini), e dei vulcani di Agnano, di Astroni in facies marina e di Cigliano in facies subaerea a nord-ovest di Pozzuoli (Stazione Cantiere). Le date in tal modo emergenti sono in accordo con il clima temperato-caldo determinato in base alle associazioni faunistiche da RODRIQUEZ, dato che esse corrispondono sostanzialmente all'optimum climatico post-glaciale.

A questo punto è anche possibile fare per il terrazzo de "La Starza" a Sta-

zione Cantiere, una valutazione dell'entità e della velocità del sollevamento nell'area, tenuto anche conto del fatto che sono note in letteratura ricostruzioni storiche dell'andamento del bradisismo flegreo (PARASCANDOLA, 1947). In base a questi dati il Serapeo di Pozzuoli, con il quale il terrazzo de "La Starza" è del tutto solidale (mancano infatti evidenze di faglie e di altre linee disgiuntive), era 4 m.al di sopra dell'attuale livello del mare all'inizio dell'epoca cristiana, e di conseguenza l'altezza della superficie dei depositi marini de "La Starza" doveva essere a 39 m in tale momento. Non c'è da apportare modifiche legate alla lama d'acqua sotto cui erano deposti i sedimenti marini, dato che essi hanno nella parte terminale una facies di spiaggia. Tenuto conto dell'età assoluta dei prodotti di Astroni, oscillante fra 4100 e 3600 anni dal presente e del fatto che già 2000 anni fa il terrazzo era a 39 m s.l.m., ne emerge una velocità media di sollevamento compresa tra 1.9 e 2.4 m per secolo. Questi valori d'altro canto sono con ogni probabilità inferiori a quelli reali, dato che essi corrispondono alla somma algebrica delle oscillazioni bradisismiche che certamente sono intervenute tra 4100-3600 anni fa e l'epoca cristiana, e che del resto sono registrate nelle variazioni di profondità di sedimentazione dei depositi marini de "La Starza".

I valori da noi ritrovati per l'intervallo 4100-2000 e 3600-2000 anni fa sono all'incirca doppi di quelli calcolati per l'intervallo che va da 2000 anni fa ad oggi. Le moderne vedute sulla dinamica vulcanologica dell'era flegrea non potranno non tener conto di questo comportamento da noi accertato.

Per quanto riguarda la sezione di Gerolomini non è possibile fare calcoli altrettanto precisi, sia per i motivi esposti precedentemente nella discussione dei dati riguardanti l'età assoluta del complesso di Agnano, sia perchè non è possibile estrapolare a questo luogo i dati storici concernenti la posizione altimetrica del Serapeo. Tuttavia va notato che nel momento in cui si andava sedimentando la parte medio-alta de "La Starza", la zona ad est di Pozzuoli (sezioni Gerolomini) era già definitivamente emersa, dato che essa si trova ai margini del bacino marino.

I calcoli da noi ottenuti per un'età variabile tra 10.700 e 8500 anni dei prodotti di Agnano presenti in facies marina a Gerolomini, ad un'altezza di 14 m s.l.m. all'inizio dell'era cristiana danno una velocità di sollevamento compresa tra 0.16 e 0.22 m per secolo. Nel caso invece che il complesso di Agnano affiorante a Gerolomini abbia un'età compresa tra 8500 anni e 3800 (età della formazione lavica a tetto, di M.te Olibano), le velocità di sollevamento oscillerebbero tra 0.2 e 0.8 m/secolo.

All'estremità opposta, verso ovest, invece i valori emersi sono compresi tra 1 e 1.4 m per secolo.

I valori calcolati risultano ovviamente confermati dalla geometria stessa

della superficie dei sedimenti marini del terrazzo che, mentre raggiunge la massima altezza in corrispondenza de "La Starza" (località Villaggio del Fanciullo) tende poi ad abbassarsi verso i lati nonostante un certo livellamento apportato dai sedimenti di M.te Nuovo. Questo quadro deformazionale ricalca, in linea generale quello che si è delineato, nel corso degli ultimi eventi bradisismici, attraverso le misure geodetiche. Emerge soprattutto una sovrapposizione degli assi di massimo sollevamento che fa dunque ritenere il bradisisma di Pozzuoli come un episodio singolo di un trend deformazionale che si sviluppa nell'area a partire da oltre 4000 anni.

Va sottolineato anche, a questo punto, che in epoca pre-cristiana il fenomeno si è sviluppato con ritmi superiori a quelli in epoca cristiana, e precisamente con velocità doppia rispetto a quella dell'epoca cristiana, ciò che fa inquadrare l'attuale fenomenologia in un quadro decrescente dell'attività endogena.

Le moderne vedute sull'interpretazione dei recenti fenomeni bradisismici dovranno tener conto del comportamento nel tempo da noi delineato, cioè notevoli velocità iniziali via via più basse.

#### BIBLIOGRAFIA

- ALESSIO M., BELLA F., IMPROTA S., BELLUOMINI G., CALDERONI G., CORTESI C., TURI B. (1973) - University of Rome Carbon - 14 Dates X. Radiocarbon; 15, n. 1, 165-178.
- ALESSIO M., BELLA F., IMPROTA S., BELLUOMINI G., CALDERONI G., CORTESI C., TURI B. (1974) - University of Rome Carbon - 14 Dates XII. Radiocarbon, 16, n. 3, 358-367.
- ALESSIO M., BELLA F., IMPROTA S., BELLUOMINI G., CORTESI C., TURI B. (1974) - University of Rome Carbon - 14 Dates IX. Radiocarbon, 16, n. 3,
- ALESSIO M., ALLEGRI L., BELLA F., IMPROTA S., BELLUOMINI G., CALDERONI G., CORTESI C., MANFRATI ., TURI B. (1978) - University of Rome Carbon - 14 Dates XVI. Radiocarbon, 20, n. 1, 79-104.
- BARBERI F., INNOCENTI F., LIRER L., MUNNO R., PESCATORE T., SANTACROCE R. (1978) - The Campanian Ignimbrite: a Major Prehistoric Eruption in the Neapolitan Area (Italy). Bull. Volcanol., 41, 1.
- BARBIERI M., DI GIROLAMO P., LOCARDI E., LOMBARDI G., STANZIONE D. (1979) - Petrology of the calc-alkaline volcanics of the Parete 2 well (Campania, Italy). Per. Mineralogia, 48, 53-74.
- BELLINI R. (1929) - Nuove osservazioni sulla malacofauna fossile flegrea. Boll. Soc. Geol. It., 48, Roma.
- BRUNI P., SBRANA A., SILVANO A. (1981) - Risultati geologici preliminari dell'esplorazione geotermica nell'area dei Campi Flegrei. Rend. Soc. Geol. It., 4,

231-236, Roma.

- CAMELI G.M., PUXEDDU M., RENDINA M., ROSSI A., SQUARCI P., TAFFI L. (1975) - Geothermal research in western Campania (Southern Italy): Geological and geophysical results. Proc. 2th Geothermal Symposium. St. Francisco.
- CASERTANO L., OLIVERI DEL CASTILLO A., QUAGLIARIELLO M.T. (1967) - Hydrodynamics and geodynamics in the Phlaegrean fields area of Italy. Nature, 264, n. 558Z, 161-164.
- CASSIGNOL C. & FILLOT P.Y. (1982) - Range and effectiveness of unsprited potassium-argon dating: experimental groundwork and applications. Numerical dating in Stratigraphy, 159-179, edited by G.S. ODIN, G. OHU WILEY e SONS.
- COLANTONI P., DEL MONTE M., FABBRI A., GALLIGNANI P., SELLI R., TOMADIN L. (1972) - Ricerche geologiche nel golfo di Pozzuoli. Quaderni de "La Ricerca Scientifica", 83, C.N.R., Roma.
- COSTA O.G. (1853) - Sopra un erpetolite idrotermale con appendice di osservazioni intorno a' depositi di avanzi organici a' piè di M. Nuovo presso Pozzuoli e nelle marne argillose dell'Isola d'Ischia. Rend. Acc. Pont., 1, 65-68, Napoli.
- COSTA O.G. (1853) - Osservazioni preliminari intorno ai fossili organici di Pozzuoli. Rend. Acc. Pont., 1, 139-145, Napoli.
- DELL'ERBA L. (1923) - Il tufo giallo napoletano. 284, Napoli.
- DE LORENZO G. (1904) - L'attività vulcanica nei Campi Flegrei. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 3, 10, 203-221, Napoli.
- DE LORENZO G., SIMOTOMAI TANAKADATE H. (1915) - I crateri del Gauro nei Campi Flegrei. Atti Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 2, 16, 51, Napoli.
- DI GIROLAMO P. (1968) - Piroclastiti stratificate riferibili al 2° periodo flegreo nella pianura campana tra il Volturno e Napoli. Per. Mineralogia, 37, 1, 341-371.
- DI GIROLAMO P. (1970) - Differenziazione gravitativa e curve isochimiche nella "Ignimbrite Campana". Rend. Soc. It. Min. Petrol., 26, 2, 547-588.
- DI GIROLAMO P., LIRER L., PORCELLI C., STANZIONE D. (1972) - Correlazioni stratigrafiche fra le principali formazioni piroclastiche della Campania (Roccamonfina, Campi Flegrei, Somma-Vesuvio). Rend. Soc. It. Min. Petrol., 28, 77-123.
- DI GIROLAMO P., GHIARA M.R., ROLANDI G., STANZIONE D. (1979) - Caratteri geochimici delle vulcaniti quaternarie della Campania (calc-alcaline, shoshonitiche, leucitiche): osservazioni geotettoniche e genetiche. Rend. Soc. It. Min. Petrol., 35, 1, 361-375.
- FALINI F. (1951) - Rilevamento geologico della zona nord-occidentale dei Campi Flegrei. Boll. Soc. Geol. It., 69, 211-264, Roma.
- LYELL C. (1872) - Principles of Geology. London.

- MINIERI V. (1950) - La terrazza della Starza nei Campi Flegrei. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, 17, 201-212, Napoli.
- ORTOLANI F., APRILE F. (1979) - Nuovi dati sulla struttura profonda della piana campana a SE del F. Volturno. Boll. Soc. Geol. It., 97, Roma.
- PARASCANDOLA A. (1974) - I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli. G. Genovese, Napoli.
- PILLA L. (1851) - Trattato di Geologia: Parte I e II. 549-626, Pisa.
- RITTMANN A. (1951) - Sintesi geologica dei Campi Flegrei. Boll. Soc. Geol. It., 69, 117-128, Roma.
- RODRIGUEZ A. (1964) - Contributo alla conoscenza delle faune fossili dei Campi Flegrei (La Starza). Boll. Soc. Sc. Natur. in Napoli, 79, 101-135, Napoli.
- SCACCHI A. (1841) - Notizie geologiche sulle conchiglie che si trovano fossili nell'Isola d'Ischia e lungo la spiaggia tra Pozzuoli e M.te Nuovo. Aut. di Sc. Nat., 1, 33-48, Napoli.
- SEGRE A.G. (1972) - La carta batimetrica del golfo di Pozzuoli. Ist. Idrogr. della Marina. Genova.
- SCHERILLO A. (1977) - Vulcanismo e bradisismo nei Campi Flegrei. Atti del Conv. Int.: "I Campi Flegrei nell'Archeologia e nella Storia" 4-7 maggio 1976, 81-116, Roma.
- SINNO R. (1955) - Relazione sul rilevamento della zona Bagnoli-Pozzuoli-Cigliano. Boll. Serv. Geol. It., 76, 589-594, Roma.
- SINNO R. (1955) - Studio geologico e petrografico della zona M.te Olibano, Pozzuoli. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, 22, 301-336, Napoli.
- SINNO R. (1956) - Studio geologico e petrografico della zona Pozzuoli-Cigliano-Arco Felice. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4, 23, 137-157, Napoli.
- VENTRIGLIA M. (1951) - Rilievo geologico dei Campi Flegrei (zona centrale, fra la direttissima Napoli-Roma e la collina dei Camaldoli). Boll. Soc. Geol. It., 69, 179-210, Roma.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, B. D'Argenio, G. Ghiara.

OSTRUZIONI AD ESTENDERE STRUTTURE DIFFERENZIABILI\*

Nota di Sara Dragotti\*\*

Presentata dal Socio Corrispondente Sandro Buoncristiano

Adunanza del 15/1/83

Riassunto

Adoperando il linguaggio dei  $\Delta$ -sets, si studiano le ostruzioni a che un  $(q-1)$ -smoothing di un PL microfibrato su una varietà PL si possa estendere ad un  $q$ -smoothing.

Abstract

Using the language of  $\Delta$ -sets, we study the obstructions to the possibility of extending a  $(q-1)$ -smoothing to a  $q$ -smoothing of the PL microbundle over a PL manifold.

1. Preliminari ed introduzione

Sia  $M$  una varietà PL senza bordo e paracompatta,  $\xi$  un  $n$ -microfibrato PL su  $M$ ,  $T$  una triangolazione ordinata di  $M$  compatibile con la struttura combinatoria fissata, ed  $X$  il  $\Delta$ -set associato a tale triangolazione.

Un  $(k,q)$ -smoothing su  $M$  è una coppia  $(P, s_k)$ , dove  $P$  è un sottopoliedro chiuso di  $X$  di codimensione  $q$ , ed  $s_k$  è un  $k$ -simpleso del  $\Delta$ -set degli smoothings di  $M-P$ .

Analogamente si definiscono i  $(k,q)$ -smoothings su  $\xi$  essere coppie  $(P, s_k)$ , dove  $P$  è come sopra, ed  $s_k$  è un  $k$ -simpleso del  $\Delta$ -set degli smoothings di  $\xi$  ristretto ad  $M-P$ . Per  $k=0$  si parla di  $q$ -smoothings semplicemente.

Definendo in maniera naturale gli operatori di faccia, gli oggetti suddetti costituiscono i  $\Delta$ -sets  $S^q(M)$  e, rispettivamente,  $S^q(\xi)$ .

Se  $\xi$  è, in particolare, il microfibrato  $TM$  tangente ad  $M$ , il  $\Delta$ -set

---

\* Ricerca effettuata con fondi erogati dal M.P.I.

\*\* Istituto di Matematica "R. Caccioppoli", via Mezzocannone 8  
Napoli (80134)

$S^q(TM)$  risulta omotopo ad  $S^q(M)$ .

Si denota con  $BPL_n$  il  $\Delta$ -set la cui realizzazione classifica gli  $n$ -microfibrati PL su una varietà,  $BPD_n$  il  $\Delta$ -set la cui realizzazione classifica le strutture differenziabili degli  $n$ -microfibrati PL su una varietà,  $\Phi$  la Kan fibrazione canonica di  $BPD_n$  su  $BPL_n$ .

In [1] è costruita per ogni  $q \geq 1$  una  $(q-1)$ -fattorizzazione di  $\Phi$  mediante il Kan  $\Delta$ -set  $BPD_n^q$  e le  $\Delta$ -applicazioni  $f_q: BPD_n \rightarrow BPD_n^q$  e  $g_q: BPD_n^q \rightarrow BPL_n$ . Il generico  $k$ -simpleso di  $BPD_n^q$  è una coppia

$$(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1} \Delta^h < \Delta^k)$$

dove  $\xi_{\Delta^k}$  è un  $n$ -microfibrato PL su  $\Delta^k$  ( $k$ -simpleso standard),  $\eta_{\Delta^h}$  è, per ogni  $\Delta^h < \Delta^k$  con  $h \leq q-1$ , un  $n$ -microfibrato differenziabile su  $\Delta^h$  ed  $f_{\Delta^h}$  è un isomorfismo PD tra  $\xi_{\Delta^k}/\Delta^h$  ed  $\eta_{\Delta^h}$  definito a meno di automorfismi PL a sinistra e di automorfismi differenziabili a destra; inoltre se  $\Delta^i$  è faccia di  $\Delta^h$ , risulta  $\eta_{\Delta^h}/\Delta^i$  coincidente con  $\eta_{\Delta^i}$  e  $f_{\Delta^h}/\Delta^i$  coincidente con  $f_{\Delta^i}$  a meno sempre di automorfismi PL a sinistra e di automorfismi differenziabili a destra.

$g_q$  è definita ponendo:

$$g_q(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1} \Delta^h < \Delta^k) = \xi_{\Delta^k}$$

ed è una Kan fibrazione.

Detta  $f$  la funzione classificante il microfibrato  $\xi$  su  $M$ , si ha che (cfr. [1] teor.3.5) l'esistenza di un sollevamento di  $f$  a  $BPD_n^q$  rispetto a  $g_q$  è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un  $q$ -smoothing su  $\xi$ .

Inoltre, in [2] è provato che le classi di omotopia verticale dei sollevamenti di  $f$  a  $BPD_n^q$  sono in corrispondenza biunivoca con le classi di concordanza dei  $q$ -smoothings su  $\xi$ .

Le  $(q-1)$ -fattorizzazioni di cui sopra determinano una successione di  $\Delta$ -sets e  $\Delta$ -applicazioni tra  $BPD_n$  e  $BPL_n$ . Precisamente, per ogni  $q \geq 1$ , indichiamo con  $r_q$  la  $\Delta$ -applicazione di  $BPD_n^q$  in  $BPD_n^{q-1}$  ottenuta ponendo  $r_1 = g_1$  e, per  $q \geq 2$ :

$$r_q(\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-1} \Delta^h < \Delta^k) = (\xi_{\Delta^k}, \{\eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h}\}_{h \leq q-2} \Delta^h < \Delta^k)$$

Ossia  $r_q$ , con  $q \geq 2$ , agisce dimenticando la struttura esistente sui  $(q-1)$ simplessi, e come l'identità sui simplessi di dimensione non superiore a  $q-2$ .

In [3], a partire dalla  $\Delta$ -applicazione  $r_q$ , che non è una fibrazione, si

è costruito per ogni  $q$  un Kan  $\Delta$ -set  $B_{r_q}$ , una Kan fibrazione  $p_q$  ed una equivalenza di omotopia  $s_q$  tali che  $r_q = p_q \circ s_q$ .

Il generico  $k$ -simpleso di  $B_{r_q}$  è una coppia  $(\sigma_k, \omega_k)$ , dove  $\sigma_k$  è un simpleso  $k$ -dimensionale di  $BPD_n^q$  ed  $\omega_k$  è un  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $BPD_n^{q-1}$  avente origine in  $r_q(\sigma_k)$  (per la definizione di  $\Delta$ -cammino cfr. [3]). L'operatore di faccia è definito in modo naturale.

La Kan fibrazione  $p_q: B_{r_q} \rightarrow BPD_n^{q-1}$  è definita ponendo:

$$p_q(\sigma_k, \omega_k) = \omega_k(\Delta^k \otimes \{1\})$$

L'equivalenza di omotopia  $s_q: BPD_n^q \rightarrow B_{r_q}$  è definita ponendo:

$$s_q(\sigma_k) = (\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k})$$

dove, detta  $\xi_{\Delta^k}$  la prima coordinata della coppia  $\sigma_k$ , il  $\Delta$ -cammino  $\bar{\omega}_{\sigma_k}$  è quello che, come  $\Delta$ -applicazione, agisce associando ad ogni simpleso  $\Delta^h$  di  $\Delta^k \otimes I$  il simpleso di  $BPD_n^{q-1}$  in cui il microfibrato PL su  $\Delta^h$  è la restrizione di  $\xi \times I$  e gli smoothings sulle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  sono le restrizioni degli smoothings prodotto per  $I$  di quelli esistenti su  $\xi$  ristretto alle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  di  $\Delta^k$ .

Lo scopo della presente nota è studiare le ostruzioni a che un sollevamento  $f'$  della funzione classificante  $f$  a  $BPD_n^{q-1}$  rispetto a  $g_{q-1}$  si sollevi a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$ .

In altre parole si può dire di voler studiare le ostruzioni a che un  $(q-1)$ -smoothing si "estenda" ad un  $q$ -smoothing.

Ciò si ottiene utilizzando la fibrazione  $p_q$  sopra definita, a cui si può applicare la teoria classica per trovare le ostruzioni al sollevamento di  $f'$  a  $B_{r_q}$ .

Osserviamo però che, mentre un sollevamento  $f''$  di  $f'$  a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$  determina, componendo con  $s_q$ , un sollevamento di  $f'$  a  $B_{r_q}$  rispetto a  $p_q$ , non è vero il viceversa. Non è cioè detto che un sollevamento di  $f'$  a  $B_{r_q}$  si fattorizzi mediante  $s_q$ .

Occorre dunque trovare le ostruzioni all'esistenza di particolari sollevamenti, studiando l'esistenza di particolari sezioni della fibrazione  $p_q$ .

Il risultato finale è quello di ottenere un  $(q-1)$ -cociclo  $c(f')$  a coefficienti nel  $(q-2)$ -esimo gruppo di omotopia della fibra di  $p_q$ , il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinché per  $f'$  esista il richiesto sollevamento  $f''$  a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$  (teor. 3.1).

L'annullarsi invece solo della classe di coomologia del cociclo suddetto dà una condizione necessaria e sufficiente affinché si possa ottenere il sol

levamento  $f''$  purché si modifichi il valore di  $f'$  solo sui semplici di dimensione  $q-2$  (teor.3.2).

## 2. Sezioni della fibrazione $p_q$ .

Sia  $X$  il  $\Delta$ -set associato alla triangolazione  $T$  di  $M$ , varietà PL senza bordo e paracompatta,  $\xi$  un  $n$ -microfibrato PL su  $X$ , ed  $f$  la  $\Delta$ -applicazione classificante  $\xi$  in  $BPL_n$ . Sia poi  $f'$  un sollevamento di  $f$  a  $BPD_n^{q-1}$  rispetto alla fibrazione  $\xi_{q-1}: BPD_n^{q-1} \rightarrow BPL_n$ .  $f'$  determina dunque un  $(q-1)$ -smoothing sul microfibrato  $\xi$  (cfr. [1]).

Supponiamo che  $f'$  si sollevi a  $B_{r_q}$  rispetto alla fibrazione  $p_q$ , e sia  $F'$  tale sollevamento:

$$\begin{array}{ccc}
 & & B_{r_q} \\
 & & \uparrow p_q \\
 & & BPD_n^{q-1} \\
 & \nearrow r_q & \downarrow \xi_{q-1} \\
 BPD_n^q & \xrightarrow{s_q} & B_{r_q} \\
 \nearrow F' & & \nearrow f' \\
 X & \xrightarrow{f} & BPL_n
 \end{array}$$

Se  $\Delta^k$  è un  $k$ -simpleso di  $X$ , si avrà:

$$F'(\Delta^k) = (\sigma_k, \omega_k)$$

con  $\sigma_k \in BPD_n^q$  ed  $\omega_k$   $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $BPD_n^{q-1}$  tale che:

$$\omega_k(\Delta^k \otimes \{0\}) = r_q(\sigma_k)$$

$$\omega_k(\Delta^k \otimes \{1\}) = F'(\Delta^k).$$

A partire da  $F'$  si ottiene una  $\Delta$ -applicazione  $\bar{F}$  di  $X$  in  $BPD_n^q$  ponendo:

$$\bar{F}(\Delta^k) = \sigma_k$$

ed  $\bar{F}$  determina un  $q$ -smoothing su un microfibrato PL  $\xi'$  su  $X$ .

Incollandolo i vari  $\omega_k$ , si ottiene invece una  $\Delta$ -applicazione  $\Omega$  di  $X \otimes I$  in  $BPD_n^{q-1}$  soddisfacente le condizioni:

$$\Omega(X \otimes \{0\}) = r_q \circ \bar{F}(X)$$

$$\Omega(X \otimes \{1\}) = F'(X).$$

Componendo  $\Omega$  con  $g_{q-1}$ , si ottiene una  $\Delta$ -applicazione di  $X \otimes I$  in  $BPL_n$ , che classifica un  $n$ -microfibrato su  $X \otimes I$  coincidente con  $\xi'$  su  $X \otimes \{0\}$  e con  $\xi$  su  $X \otimes \{1\}$ . Poiché un  $n$ -microfibrato su  $X \times I$  è isomorfo ad un prodotto (cfr. [4] pag. 161),  $\xi'$  è isomorfo a  $\xi$ .

L'esistenza di un sollevamento  $F'$  di  $f'$  a  $B_{r_q}$  rispetto a  $p_q$  comporta che sul sotto  $\Delta$ -set  $f'(X)$  di  $BPD_n^{q-1}$  è definita una  $\Delta$ -applicazione  $h_q$  in  $B_{r_q}$  che inverte  $p_q$ :

$$h_q \circ f' = F'.$$

Viceversa, l'esistenza di  $h_q$  comporta quella di  $F'$ . Pertanto la ricerca dei sollevamenti di  $f'$  a  $B_{r_q}$  rispetto a  $p_q$  equivale alla ricerca delle sezioni della fibrazione:

$$B_{r_q} \xrightarrow{p_q} BPD_n^{q-1}$$

ristretta ad  $f'(X)$ .

In proposito vale il seguente:

**TEOREMA 2.1** - La fibrazione  $p_q: B_{r_q} \rightarrow BPD_n^{q-1}$  ammette sempre una sezione sullo scheletro  $(q-2)$ -dimensionale di  $BPD_n^{q-1}$ .

*dimostrazione*

Osserviamo che un simplekso  $\sigma_k$  dello scheletro  $(q-2)$ -dimensionale  $(BPD_n^{q-1})^{q-2}$  è sempre immagine mediante  $r_q$  di un simplekso di  $BPD_n^q$ , in quanto  $(BPD_n^{q-1})^{q-2} = (BPD_n^q)^{q-2}$  ed  $r_q$  agisce come l'identità sui simplekssi di dimensione non maggiore di  $q-2$ . Pertanto possiamo costruire una  $\Delta$ -applicazione  $\bar{h}_q$  di  $(BPD_n^{q-1})^{q-2}$  in  $B_{r_q}$  ponendo per  $k \leq q-2$ :

$$\bar{h}_q(\sigma_k) = s_q(\sigma_k) = (\sigma_k, \bar{\omega}_{\sigma_k})$$

dove (cfr. [3])  $\bar{\omega}_{\sigma_k}$  è il  $\Delta$ -cammino di ordine  $k$  in  $BPD_n^{q-1}$  che, come  $\Delta$ -applicazione, agisce associando ad ogni simplekso  $\Delta^h$  di  $\Delta^k \otimes I$  il simplekso di  $BPD_n^{q-1}$  in cui il microfibrato PL su  $\Delta^h$  è la restrizione di  $\xi \times I$ , e gli smoothings sulle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  (e quindi su tutte in questo caso) sono le restrizioni degli smoothings prodotto per  $I$  di quelli

esistenti su  $\xi$  ristretto alle facce di dimensione non maggiore di  $q-2$  di  $\Delta^k$ .  
Risulta chiaramente:

$$p_q \circ \bar{h}_q = p_q \circ s_q / (\text{BPD}_n^q)^{q-2} = r_q / (\text{BPD}_n^q)^{q-2} = \text{id} .$$

Dal teorema precedente segue che il problema di trovare le sezioni della fibrazione  $p_q$  ristretta ad  $f^*(X)$  equivale a quello di estendere agli scheletri successivi sezioni certamente esistenti su quello di dimensione  $q-2$ . In realtà è sufficiente l'estensione allo scheletro di dimensione  $q-1$ . Sussiste infatti il seguente:

**TEOREMA 2.2** - Se la fibrazione  $p_q: B_{r_q} \rightarrow \text{BPD}_n^{q-1}$  ammette una sezione  $h_q$  sullo scheletro  $(q-1)$ -dimensionale di un sotto- $\Delta$ -set  $Y$  di  $\text{BPD}_n^{q-1}$ , questa si estende a tutto  $Y$ .

*dimostrazione*

Sia  $h_q: (Y)^{q-1} \rightarrow B_{r_q}$  una sezione di  $p_q$  e sia  $\tau_q$  un simplesso di dimensione  $q$  di  $Y$ :

$$\tau_q = \left( \xi_{\Delta^q}, \left\{ \eta_{\Delta^h}, f_{\Delta^h} \right\}_{\substack{\Delta^h \subset \Delta^q \\ h \leq q-1}} \right),$$

sul suo bordo  $\dot{\tau}_q$  è definita  $h_q$ :

$$\begin{aligned} \forall \tau_{q-1}^i \subset \tau_q \quad h_q(\tau_{q-1}^i) &= (\sigma_{q-1}^i, \omega_{q-1}^i) \\ \omega_{q-1}^i(\Delta^{q-1} \otimes \{0\}) &= r_q(\sigma_{q-1}^i) \\ \omega_{q-1}^i(\Delta^{q-1} \otimes \{1\}) &= \tau_{q-1}^i . \end{aligned}$$

Le  $\omega_{q-1}^i$ ,  $0 \leq i \leq q$ , determinano, per incollamento, una  $\Delta$ -applicazione  $\bar{\omega}_q$  di  $\dot{\Delta}^q \otimes I$  in  $\text{BPD}_n^{q-1}$ . Si può allora costruire una  $\Delta$ -applicazione  $\omega_q$  di  $\Delta^q \otimes I$  in  $\text{BPD}_n^{q-1}$  ponendo:

$$\omega_q / \dot{\Delta}^q \otimes I = \bar{\omega}_q$$

$$\omega_q(\Delta^q \otimes \{1\}) = \tau_q$$

ed estendendo a tutto  $\Delta^q \otimes I$ , in quanto quest'ultimo collassa a  $\dot{\Delta}^q * I \cup \Delta^q * \{1\}$  e  $\text{BPD}_n^{q-1}$  è Kan.

Osserviamo ora che  $\omega_q(\Delta^q \otimes \{0\})$  è un simpleso di  $BPD_n^{q-1}$  sulle cui facce  $(q-1)$ -dimensionali si possono dare degli smoothings, e quindi è l'immagine mediante  $r_q$  di un simpleso  $\sigma_q$  di  $BPD_n^q$ . Ponendo allora:

$$h'_q(\tau_q) = (\sigma_q, \omega_q),$$

si ottiene una estensione di  $h_q$  al  $q$ -esimo scheletro di  $Y$ .

Essendo ovvio il modo di procedere per l'estensione di  $h_q$  agli scheletri di dimensione superiore, il teorema è completamente provato.

### 3. Ostruzioni.

Con le notazioni del paragrafo precedente, sia data una sezione  $h_q$  di  $p_q$  sullo scheletro  $(q-2)$ -dimensionale di  $f'(X)$ .

Per ogni simpleso  $\sigma_{q-1}$  di  $f'(X)$ , sul suo bordo  $\dot{\sigma}_{q-1}$  è definita  $h_q$ . Per estendere  $h_q$  allo scheletro di dimensione  $q-1$  occorre e basta che per ogni  $\sigma_{q-1}$   $h_q/\dot{\sigma}_{q-1}$  si estenda a  $\sigma_{q-1}$ . Ciò dipende ovviamente dalla classe di omotopia di  $h_q/\dot{\sigma}_{q-1}$  nella fibra  $P_q$  di  $p_q$ , classe che indicheremo con il simbolo  $d(\sigma_{q-1}, h_q)$ . Associando  $d(\sigma_{q-1}, h_q)$  ad ogni  $\sigma_{q-1}$ , si determina una cocatena  $c(h_q)$  di dimensione  $q-1$  di  $f'(X)$  a coefficienti in  $\pi_{q-2}(P_q)$ .

Dalla teoria classica dell'ostruzione, si sa che  $c(h_q)$  è un cociclo, e che il suo annullarsi è condizione necessaria e sufficiente affinché  $h_q$  si estenda al  $(q-1)$ -esimo scheletro di  $f'(X)$ , e quindi a tutto  $f'(X)$  in virtù del teorema 2.2.

Indichiamo ora con  $c(f')$  il cociclo di ostruzione associato alla sezione  $\bar{h}_q$ , di cui al teor. 2.1, ristretta ad  $f'(X)$ .

Sussiste allora il seguente:

**TEOREMA 3.1** -  $f'$  ammette un sollevamento  $f''$  a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$ , se, e solo se,  $c(f')$  è il cociclo nullo.

*dimostrazione*

Supponiamo esista un sollevamento  $f''$  di  $f'$  a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$ . Ogni simpleso  $\tau_{q-1} = f'(\Delta^{q-1})$  di  $f'(X)$  è immagine mediante  $r_q$  del simpleso  $\sigma_{q-1} = f''(\Delta^{q-1})$  di  $BPD_n^q$ . Allora la sezione  $\bar{h}_q$  si estende al  $(q-1)$ -esimo scheletro di  $f'(X)$  ponendo per ogni  $\tau_{q-1}$ :

$$\bar{h}_q(\tau_{q-1}) = (\sigma_{q-1}, \bar{\omega}_{\sigma_{q-1}})$$

dove  $\bar{\omega}_{\sigma_{q-1}}$  è il  $\Delta$ -coppio di origine e fine  $r_q(\sigma_{q-1}) = \tau_{q-1}$  precedentemente definito. Pertanto  $c(f')$  è nullo.

Viceversa, sia  $c(f') = 0$ . Allora  $\bar{h}_q$  si estende al  $(q-1)$ -esimo scheletro. Non risulta, però, che, detta  $(\sigma_{q-1}, \omega_{q-1})$  l'immagine mediante la estensione di  $\bar{h}_q$  di un simpleso  $\tau_{q-1}$ , il  $\Delta$ -cammino  $\omega_{q-1}$  sia un  $\Delta$ -coppio. In ogni caso, posto:

$$\sigma'_{q-1} = \left( \xi'_{\Delta^{q-1}}, \{ \eta_{\Delta^h}, f'_{\Delta^h} \} \Delta^h \prec \Delta^{q-1} \right),$$

il già citato teorema sul microfibrato su un prodotto, nella versione relativa, ([4], pag. 161) assicura che  $\xi^*$  è isomorfo a  $\xi$  e coincide con esso sullo scheletro di dimensione  $q-2$  di  $X$ . Pertanto, componendo ciascuna funzione PD  $f'_{\Delta^{q-1}}$  con l'isomorfismo PL tra  $\xi_{\Delta^{q-1}}$  e  $\xi'_{\Delta^{q-1}}$ , si ottengono degli smoothings  $(\eta_{\Delta^{q-1}}, f_{\Delta^{q-1}})$  sui vari  $\xi_{\Delta^{q-1}}$ .

Ponendo infine, per ogni  $\Delta^{q-1}$  di  $X$ :

$$f''(\Delta^{q-1}) = \sigma_{q-1} = \left( \xi_{\Delta^{q-1}}, \{ \eta_{\Delta^{q-1}}, f_{\Delta^{q-1}} \} \right),$$

si ottiene una  $\Delta$ -applicazione di  $X$  in  $BPD_n^q$  per cui risulta:

$$r_q \circ f'' = f'.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Supponiamo che  $c(f')$  sia non nullo. Il teorema precedente assicura che  $f'$  non si solleva a  $BPD_n^q$  rispetto ad  $r_q$ . Si può tuttavia, sotto opportune ipotesi, recuperare quanto più possibile di un  $(q-1)$ -smoothing associato ad  $f$  per ottenere un  $q$ -smoothing.

Il senso di quanto vagamente detto sopra è precisato dal seguente:

**TEOREMA 3.2** - Se, e solo se, è nulla la classe di coomologia del cociclo  $c(f')$ , esiste un sollevamento  $f''$  di  $f$  a  $BPD_n^q$  rispetto a  $r_q$  tale che:

$$r_{q-1} \circ r_q \circ f'' = r_{q-1} \circ f'$$

*dimostrazione*

Supponiamo sia nulla la classe di coomologia di  $c(f')$ .

Dalla teoria dell'ostruzione (cfr. [8]) risulta allora che la restrizione di  $\bar{h}_q$  allo scheletro di dimensione  $q-3$  di  $f'(X)$  si estende al  $(q-1)$ -esimo scheletro, e quindi a tutto  $f'(X)$ . Componendo la sezione ottenuta con  $f'$ ,

si ottiene un sollevamento di  $f'$  a  $B_{r_q}$  che determina, per quanto detto nel teorema precedente, un sollevamento  $f''$  di  $f$  a  $BPD_n^q$  tale che  $r_q \circ f''$  coincide con  $f'$  sullo scheletro di dimensione  $q-3$ . La relazione dell'enunciato segue allora dal fatto che  $r_{q-1}$  agisce come l'identità sullo scheletro suddetto.

Il viceversa del teorema si prova facilmente con argomentazioni del tipo di quelle già usate.

In altre parole il teorema precedente asserisce che se  $c(f')$  è coomologo a zero, basta alterare il valore di  $f'$  sui semplici di dimensione  $q-2$  per ottenere che esso si sollevi a  $BPD_n^q$ .

Sia ora  $(P,s)$  un  $(q-1)$ -smoothing su  $\xi$ . Per un risultato di [2] (teor. 4.2), esiste un  $(q-1)$ -smoothing  $(P',s')$  concordante a  $(P,s)$  ed associato ad un sollevamento  $f'$  di  $f$  a  $BPD_n^{q-1}$ . Nel caso che  $c(f')$  si annulli, diremo che  $(P,s)$  "si estende" ad un  $q$ -smoothing.

Osserviamo ora che l'annullarsi del cociclo  $c(f')$  non è una proprietà invariante per omotopia verticale (l'ostacolo è lo stesso per cui  $r_q$  non è una fibrazione). Analoga cosa si può dire per la classe di coomologia di  $c(f')$ . Pertanto la possibilità di "migliorare" un  $(q-1)$ -smoothing per ottenere un  $q$ -smoothing, anche nel caso di un  $(q-1)$ -smoothing associato ad un sollevamento, va sempre intesa a meno di concordanza.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S.DRAGOTTI, R.ESPOSITO, G.MAGRO, L.PARLATO, q-smoothings , Ricerche di Matematica XXX, 1 (1981).
- [2] S.DRAGOTTI, Sulle strutture differenziabili parziali di un microfibrato su una varietà PL, (in corso di stampa).
- [3] S.DRAGOTTI, Una costruzione per particolari  $\Delta$ -sets, (in corso di stampa).
- [4] R.KIRBY, L.SIEBENMANN, Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations, Princeton, 1977.
- [5] J.MILNOR, Microbundles part 1, Topology vol.3 (1964), Supplement 1,53-80.
- [6] C.P.ROURKE, B.J.SANDERSON,  $\Delta$ -sets I: Homotopy theory, Quart. J. Math. Oxford (2), 22 (1971), 321-338.
- [7] E.H.SPANIER, Algebraic topology, Mc Graw Hill Inc. 1966.
- [8] N.STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. press, 1951.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, G. Panella, S. Buoncris-  
tiano.

ALCUNE OSSERVAZIONI SU UNA CLASSE DI  
ASSIOMI DI SEPARAZIONE PIU' DEBOLI DI  $T_1$

Nota di Giuditta De Simone<sup>(1)</sup> e Giuseppe Di Maio<sup>(2)(\*)</sup>

presentata dal socio prof. Alfredo Franchetta  
adunanza del 5.2.1983

Riassunto: Scopo di questo lavoro è lo studio delle proprietà topologiche di una vasta classe di assiomi di separazione più deboli di  $T_1$ .

Abstract: The main purpose of this paper is to investigate the topological properties of a large class of separation axioms weaker than  $T_1$ .

1. Introduzione

In [1] C.E. Aull e W.J. Thron hanno introdotto una classe di assiomi di separazione compresi fra  $T_0$  e  $T_1$ . Tali assiomi hanno un ruolo importante nello studio della topologia di Zariski di uno schema e più in generale degli insiemi spettrali (cfr. [2] e [3]). Rimanendo in ambito puramente topologico il lavoro citato ha ispirato vari autori a definire numerosi assiomi di separazione più deboli di  $T_1$ .

Scopo di questa nota è studiare il comportamento di una vasta classe di assiomi più deboli di  $T_1$  rispetto alla relazione di finezza tra topologie, passaggio al sottospazio, prodotto.

Gli autori ringraziano il prof. S.Thomeier per aver suggerito il tema di questa ricerca.

2. Considerazioni preliminari

Assegnato lo spazio topologico  $(X, \mathcal{C})$  indicheremo con  $\bar{A}$  e  $A'$  rispettivamente la chiusura e il derivato di un sottoinsieme  $A$  di  $X$ . Inoltre, dati due sottoinsiemi  $A$  e  $B$  di  $X$ , si dice che  $A$  è debolmente separato da  $B$ , e si scrive  $A \dashv B$ , se esiste un aperto  $C$  tale che  $C \supset A$  e  $C \cap B = \emptyset$ . La chiu

(1) Italsiel, Via Isonzo 21 B, 00189 Roma

(2) Istituto di Matematica "R. Caccioppoli", Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito del contratto di ricerca A 8777 (Canada)

sura di un punto  $x$  di  $X$ ,  $\overline{\{x\}}$ , si caratterizza come l'insieme dei punti  $y \in X$  che non risultano debolmente separati da  $x$ , ossia

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X : \{y\} \not\ll \{x\}\}.$$

Il kernel  $\widehat{\{x\}}$  di  $x$  è l'insieme dei punti  $y \in X$  tali che  $\{x\} \not\ll \{y\}$ . L'insieme  $\widehat{\{x\}} - \{x\}$  si dice, poi, shell di  $x$  e si indica con  $\widehat{x}$ . Vale la relazione

$$\widehat{x} = \bigcap \{A : A \text{ aperto e } x \in A\}.$$

Inoltre si pone

$$N_D = \{x \in X : \{x\}' = \emptyset\}, \quad N_S = \{x \in X : \widehat{x} = \emptyset\}.$$

Spesso, nel seguito, nel dire che  $\mathcal{C}$  è la topologia su  $X$  che ha per aperti (chiusi) la famiglia  $\mathcal{A}$  intenderemo che  $\mathcal{C}$  è la topologia che ha come sottobase per gli aperti (per i chiusi) la famiglia  $\mathcal{A}$ . Ricordiamo, infine, che un sottoinsieme  $Z \subset X$  si dice degenere se contiene al più un punto.

**Definizione 2.1** - Uno spazio  $(X, \mathcal{C})$  si dice  $T_{UD}$  se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  è unione di chiusi disgiunti.

Uno spazio  $(X, \mathcal{C})$  si dice  $T_D$  se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  è chiuso.

Uno spazio  $X$  si dice  $T_{DD}$  se è  $T_D$  e per ogni  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ,

$$\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset, \quad [1].$$

**Definizione 2.2** - Uno spazio si dice a punti di Borel o  $T_D$  ([6]) se ogni suo punto  $x$  è un insieme di Borel<sup>(1)</sup>.

**Definizione 2.3** - Uno spazio  $X$  è  $T_F$  se per ogni  $x \in X$  e per ogni sottoinsieme finito  $F$  di  $X$ , con  $x \notin F$ , accade che o  $\{x\} \ll F$  oppure  $F \ll \{x\}$  ([1]).

Uno spazio  $X$  si dice  $T_{FF}$  se per ogni coppia  $F_1, F_2$  di sottoinsiemi finiti e disgiunti o  $F_1 \ll F_2$  oppure  $F_2 \ll F_1$  ([1]).

Uno spazio  $X$  è  $T_M$  se per ogni  $x \in X$  e per ogni sottoinsieme  $M$  di  $X$ , con  $x \notin M$ , o  $\{x\} \ll M$  oppure  $M \ll \{x\}$ , ([7]).

**Definizione 2.4** - Uno spazio  $X$  è detto  $T_Y$  se per ogni  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ,  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$  è degenere.

Uno spazio  $X$  si dice  $T_{YS}$  se per ogni  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ ,  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$  o è vuoto o è uguale ad  $\{x\}$ , oppure è uguale ad  $\{y\}$ , ([1]).

**Definizione 2.5** - Uno spazio  $X$  è  $T_R$  se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  o è vuoto op-

(1) La famiglia  $\mathcal{B}$  degli insiemi di Borel dello spazio topologico  $(X, \mathcal{A})$  è la più piccola famiglia  $\mathcal{B}$  che contiene la famiglia degli aperti  $\mathcal{A}$  e che soddisfa la condizione:  $B_i \in \mathcal{B}, i \in \mathbb{N} \rightarrow [B_i \in \mathcal{B} \text{ e } \bigcap B_i \in \mathcal{B}]$ , [4].

pure contiene un chiuso non vuoto, ( [11] ).

Uno spazio  $X$  si dice  $T_N$  se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  o è vuoto o contiene almeno due chiusi non vuoti e disgiunti, ( [11] ).

Definizione 2.6 - Uno spazio  $X$  si dice  $C_D$  se non esiste alcun punto  $x$  tale che  $\{x\}'$  sia chiuso e non vuoto.

Uno spazio  $X$  è  $C_0$  se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  non è unione di chiusi non vuoti.

Uno spazio  $X$  è  $C_R$  se non esiste alcun punto  $x$  tale che  $\{x\}'$  contenga un chiuso non vuoto.

Uno spazio  $X$  è  $C_N$  se due chiusi non vuoti e disgiunti non possono appartenere al derivato  $\{x\}'$  di un punto  $x \in X$ , ( [11] ).

Definizione 2.7 - Uno spazio  $X$  è  $R_0$  se per ogni aperto  $A$  risulta

$$x \in A \longrightarrow \overline{\{x\}} \subset A.$$

Definizione 2.8 - Uno spazio  $X$  si dice  $T_g$  se ogni insieme  $g$ -chiuso<sup>(2)</sup> è chiuso, ( [8] ).

Osservazione 2.1 - Si dimostra facilmente che uno spazio è  $C_R$  se e solo se è  $R_0$ .

Riportiamo alcune caratterizzazioni ben note degli assiomi elencati che utilizzeremo nel seguito.

Proposizione 2.1 ( [1] ) - Uno spazio è  $T_D$  se e solo se per ogni  $x \in X$  esistono un aperto  $G$  ed un chiuso  $C$  tali che  $\{x\} = C \cap G$ .

Proposizione 2.2 ( [6] ) - Uno spazio è  $T_B$  se e solo se ogni punto è intersezione di un chiuso e di un  $G_\delta$  (un sottoinsieme  $Z \subset X$  è un  $G_\delta$  se è intersezione di una famiglia contabile di aperti).

Proposizione 2.3 ( [1] ) - Uno spazio  $X$  è  $T_F$  se e solo se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

- (a) per ogni  $x \in X$ ,  $y \in \{x\}' \longrightarrow \{y\}' = \emptyset$ ;
- (b) per ogni  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , o  $\widehat{\{x\}} \cap \widehat{\{y\}}$  è degenere oppure  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$  è degenere.

Proposizione 2.4 ( [1] ) - Uno spazio  $X$  è  $T_{FF}$  se e solo se o

- (a)  $X - N_D$  è degenere,

(2) Un insieme  $A$  si dice  $g$ -chiuso se per ogni aperto  $I$  tale che  $A \subset I$  accade che  $\overline{A} \subset I$ .

oppure

(b)  $X - N_S$  è degenere.

Proposizione 2.5 ([7]) - Uno spazio  $X$  è  $T_M$  se e solo se, per ogni  $x \in X$ ,  $\{x\}$  è o aperto oppure chiuso.

Osservazione 2.2 - W. Dunham ha dimostrato in [5] che la caratterizzazione di cui alla proposizione 2.5 vale per gli spazi  $T_{\frac{1}{2}}$ .

Proposizione 2.6 ([11]) - Uno spazio  $X$  è  $C_0$  se e solo se, per ogni  $x \in X$  o  $\{x\}' = \emptyset$  oppure esiste  $y \in \{x\}'$  tale che ogni aperto contenente  $x$  contiene  $y$ .

Proposizione 2.7 ([11]) - Uno spazio  $X$  è  $C_D$  se e solo se, per ogni  $x \in X$  o  $\{x\}' = \emptyset$  oppure ogni aperto contenente  $x$  contiene un punto di  $\{x\}'$ .

Riportiamo alcuni esempi di spazi topologici che verificano gli assiomi elencati e che saranno utilizzati nel seguito.

Esempio 2.1 -  $(X, \mathcal{E}_1)$  è lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  che ha per chiusi i singletons  $\{x\}$ ,  $x \neq 0$ .  $(X, \mathcal{E}_1)$  è  $T_{FF}$  e  $T_{VS}$  ma non è  $T_D$ , ([1]).

Esempio 2.2 -  $(X, \mathcal{E}_2)$  è lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  che ha per chiusi gli insiemi  $\{x, -x\}$  per  $x \in \mathbb{R}$  e gli insiemi  $\{x\}$  per  $x \geq 0$ . Tale spazio è  $T_{DD}$  ma non è  $T_{FF}$ , ([1]).

Esempio 2.3 -  $(X, \mathcal{E}_3)$  è lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  che ha per chiusi le semirette destre aperte o chiuse. Tale spazio è  $T_{UD}$ ,  $T_D$  ma non è  $T_{FF}$  nè  $T_{DD}$ , ([1]). Inoltre risulta  $C_N$  ma non  $C_D$ , ([11]).

Esempio 2.4 -  $(X, \mathcal{E}_4)$  è lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  che ha per chiusi i singletons  $\{x\}$ , per  $x > 0$ , e la semiretta  $]-\infty, 0]$ . Tale spazio è  $C_R$  e quindi di  $C_N$ ,  $C_0$ ,  $C_D$  ma non è nè  $T_R$  e nemmeno  $T_N$ , ([7]), ([11]).

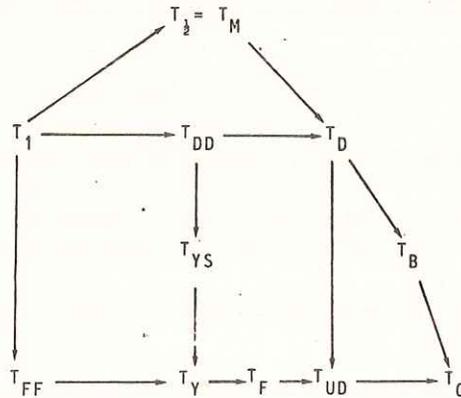
Esempio 2.5 -  $(X, \mathcal{E}_5)$  ha per sostegno  $\mathbb{R}$  e per chiusi i singletons  $\{x\}$ , per  $x > 0$ . Tale spazio è  $C_0$ ,  $T_R$ ,  $T_N$ , ([11]).

Esempio 2.6 -  $(X, \mathcal{A}_1)$  denota lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  che ha per aperti i singletons  $\{x\}$ , per  $x \neq 0$ . Tale spazio è  $T_{FF}$  ma non  $T_{VS}$  ([1]).

Esempio 2.7 -  $(X, \mathcal{A}_2)$  denota l'insieme dei numeri reali con la topologia delle semirette sinistre aperte. Tale spazio è  $T_B$  ma non è  $T_{UD}$ . Inoltre è  $C_D$ .

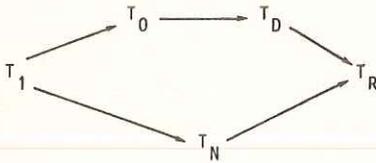
Dai risultati contenuti in [1], [5], [6], [7], [8], [10] e dall'esempio 2.7 si ricava il seguente diagramma che illustra le relazioni d'ordine esistenti

ti fra gli assiomi di separazione compresi tra  $T_0$  e  $T_1$ . Si pone in evidenza che la posizione degli spazi  $T_B$  è così completamente individuata.

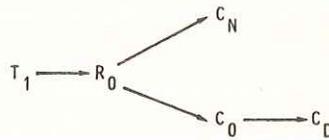


Tab. 1

Per i rimanenti assiomi più deboli di  $T_1$  sussistono i seguenti diagrammi stabiliti in [7], [11].



Tab. 2



Tab. 3

### 3. Passaggio a topologie più fini e meno fini.

**Proposizione 3.1** - Tutti gli assiomi più deboli di  $T_1$  riportati nella tab.1 si conservano nel passaggio a topologie più fini.

**Dim:** Immediata. In particolare per il caso  $T_D$  basta tener presente la prop. 2.1, per il caso  $T_B$  la prop. 2.2.

**Proposizione 3.2** - Tutti gli assiomi più deboli di  $T_1$  riportati nelle tabelle 2,3 non si conservano nel passaggio a topologie più fini.

**Dim:** Proveremo l'asserto mediante i seguenti controesempi 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

**Esempio 3.1** - Lo spazio  $(X, \mathcal{E}_5)$  è uno spazio  $C_0$  e  $C_D$ , ma se raffiniamo la topologia aggiungendo i chiusi  $\{0\}$  e  $\{-x, 0, x\}$ , per ogni  $x > 0$ , si ottiene uno spazio non  $C_D$  (e quindi non  $C_0$ ) in quanto in particolare si ha

$$\{-1\}' = \{0\} \cup \{1\}.$$

Esempio 3.2 - Sia  $\mathbb{R}$  dotato della topologia banale. Tale spazio è evidentemente  $C_R$  ma  $(X, \mathcal{E}_5)$  non è  $C_R$ .

Esempio 3.3 - Sia  $(X, \mathcal{E}_7)$  lo spazio di sostegno  $\mathbb{R}$  avente per chiusi gli insiemi del tipo  $\{-x, 0, x\}$ , per  $x \neq 0$ . Tale spazio è  $C_N$ . Se raffiniamo la topologia imponendo che siano chiusi anche i singletons  $\{x\}$ ,  $x \geq 0$ , otteniamo uno spazio che non è  $C_N$  in quanto, in particolare si ha:  $\{-3\}' = \{0\} \cup \{3\}$ .

Esempio 3.4 - Lo spazio  $(X, \mathcal{E}_5)$  verifica gli assiomi  $T_R$  e  $T_N$ . La topologia  $\mathcal{E}_4$  è più fine di  $\mathcal{E}_5$  ma non è nè  $T_R$  e nemmeno  $T_N$ .

Proposizione 3.3 - Gli assiomi di cui alla prop.3.1 non si conservano nel passaggio a topologie meno fini.

Dim: Basta considerare lo spazio cofinito e lo spazio banale su un sostegno non degenerare.

Proposizione 3.4 - Gli assiomi di cui alla prop.3.2 non si conservano nel passaggio a topologie meno fini.

Dim: Per gli assiomi  $T_N$  e  $T_R$  si ragiona come nella prop.3.3. Per gli assiomi rimanenti si sfruttano i seguenti controesempi 3.6 e 3.7.

Esempio 3.6 - Sia  $X = \{a, b, c\}$  dotato della topologia discreta. La topologia  $\mathcal{Q}_2$  su  $X$  che ha come aperti  $\{a\}$ ,  $\{a, b\}$ , non è  $C_R$  in quanto  $\{a\} \subset \{a, b\}$  ma  $\overline{\{a\}} = X$ .

Esempio 3.7 - Sia  $X = \{a, b, c, d\}$  dotato della topologia discreta. Consideriamo la topologia  $\mathcal{E}_8$  su  $X$  che ha come chiusi  $\{a\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{c\}$ . Si ha che  $\{b\}' = \{a\}$  e quindi  $\mathcal{E}_8$  non è nè  $C_D$  e nemmeno  $C_0$ ;  $\{d\}' = \{a, b\} \cup \{c\}$  e pertanto  $\mathcal{E}_8$  non è  $C_N$ .

#### 4. Passaggio al sottospazio

Proposizione 4.1 - Gli assiomi riportati nella tab.1 e l'assioma  $C_R$  si conservano passando al sottospazio.

Dim: Immediata.

Proposizione 4.2 - Gli assiomi  $T_R$ ,  $T_N$ ,  $C_0$ ,  $C_D$  e  $C_N$  non si conservano passando al sottospazio.

Dim: Proveremo l'asserto mediante i controesempi 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

Esempio 4.1 - Sia  $X = \{a, b, c\}$  e  $\mathcal{C}_9 = \{X, \emptyset, \{a\}\}$  la famiglia dei chiusi. Lo spazio in questione è  $T_R$ . Il sottospazio  $\{b, c\}$  ha la topologia banale e quindi non è  $T_R$ .

Esempio 4.2 - Sia  $X = \{a, b, c, d\}$  e  $\mathcal{C}_{10} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$  la famiglia dei chiusi. Lo spazio è  $T_N$ . Il sottospazio  $\{a, c\}$  non è  $T_N$  in quanto  $\{c\}' = \{a\}$ .

Esempio 4.3 - Sia  $\mathbb{R}$  dotato della topologia che ha per chiusi propri l'insieme  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$  e tutti i sottoinsiemi finiti di  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ . Lo spazio costruito è  $C_0$  e  $C_D$ . Consideriamo il sottospazio  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ . Si ha che  $\{1\}' = \mathbb{R} - \{0, 1\}$  che è chiuso. Pertanto  $X$  non è  $C_D$  e quindi neanche  $C_0$ .

Esempio 4.4 - Sia  $X = \{a, b, c, d, e\}$  e  $\mathcal{C}_{11} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b\}\}$  la famiglia dei chiusi propri. Si verifica che lo spazio è  $C_N$ . Consideriamo il sottospazio  $S = \{a, c, e\}$ . Risulta  $\{e\}' \supset \{a\} \cup \{b\}$  ed  $\{a\}$  e  $\{b\}$  sono chiusi in  $S$ . Pertanto  $S$  non è  $C_N$ .

## 5. Prodotti

Dividiamo gli assiomi di separazione esaminati in gruppi omogenei rispetto al comportamento nel passaggio a prodotto.

Proposizione 5.1 - Sia  $X = \prod_1^n X_i$  un prodotto finito di spazi topologici. Se  $X$  è  $T_{UD}$  (risp.  $T_{DD}$ ,  $T_F$ ,  $T_{FF}$ ,  $T_Y$ ,  $T_{YS}$ ) tale è ogni fattore essendo omeomorfo ad un sottospazio del prodotto. L'affermazione inversa, come mostreremo con i controesempi 5.1 e 5.2, non è in generale vera.

Esempio 5.1 - Lo spazio topologico  $(X, \mathcal{C}_1)$  è  $T_{UD}$ ,  $T_F$ ,  $T_{FF}$ ,  $T_Y$ ,  $T_{YS}$ . Il prodotto  $X \times X$  non è  $T_{UD}$  poichè il derivato del punto  $(0, 0)$  è  $X \times X - \{(0, 0)\}$  e non si può scrivere come unione di chiusi disgiunti. Pertanto  $X \times X$  non soddisfa nemmeno i rimanenti assiomi.

Esempio 5.2 - Lo spazio  $(X, \mathcal{C}_2)$  è  $T_{DD}$ . Il prodotto  $X \times X$  non è  $T_{DD}$ . Infatti consideriamo i punti  $(3, -5)$  e  $(-3, 5)$ . Risulta  $\{(3, -5)\}' = \{(-3, 5)\}' = \{(3, 5)\} \neq \emptyset$  e di qui l'asserto.

Proposizione 5.2 - Condizione sufficiente affinché un prodotto finito  $X = \prod_1^n X_i$  sia  $T_{UD}$  (risp.  $T_{DD}$ ,  $T_F$ ,  $T_Y$ ,  $T_{YS}$ ) è che tutti i fattori siano  $T_1$  tranne al più uno di essi che è  $T_{UD}$  (risp.  $T_{DD}$ ,  $T_F$ ,  $T_Y$ ,  $T_{YS}$ ).

Dim: Sia  $X = \prod_1^n X_i$  e supponiamo per fissare le idee che  $X_1, \dots, X_{n-1}$  siano  $T_1$  ed  $X_n$  soddisfi di volta in volta l'assioma in discussione.

Caso  $T_{UD}$ . Consideriamo un punto  $y = (y_1, \dots, y_n)$  di  $X$ . Risulta

$$\{y\}' = \overline{\{y_1\}} \times \dots \times \overline{\{y_{n-1}\}} \times \{y_n\}'.$$

Otteniamo un prodotto di  $n-1$  punti che sono chiusi per un'unione di chiusi disgiunti.

Caso  $T_{DD}$ ,  $T_Y$ ,  $T_{YS}$  la dimostrazione è analoga.

Caso  $T_F$ . Sia  $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$ . Risulta  $\{y\}' = \{y_1\}' \times \dots \times \{y_{n-1}\}' \times \{y_n\}'$ . Sia  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{y\}'$ . Si ha che  $z_n \in \{y_n\}'$  e poichè  $X_n \in T_F$   $\{z_n\}' = \emptyset$ . Ne segue che  $\{z\}' = \emptyset$  e per la prop. 2.3 a) l'asserto.

Proposizione 5.3 - Sia  $X_n$  propriamente  $T_{FF}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  sia  $T_{FF}$  è che gli spazi  $X_1, \dots, X_{n-1}$  siano ridotti a singoli punti.

Dim: La sufficienza della condizione è ovvia. Dimostriamo la necessarietà.

Supponiamo che  $X_1 = \{a_1\}$ ,  $\dots$ ,  $X_{n-2} = \{a_{n-2}\}$ ,  $X_{n-1} = \{a_{n-1}, b_{n-1}\}$  ed  $X_n$  sia propriamente  $T_{FF}$ . Allora esiste un unico  $a_n \in X_n$  tale che  $\{a_n\}' \neq \emptyset$  oppure esiste un unico  $b_n \in X_n$  tale che  $\{b_n\}' \neq \emptyset$ .

Esaminiamo il primo caso. Risulta

$$\{(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)\}' = \{a_1\}' \times \dots \times \{a_{n-1}\}' \times \{a_n\}' \neq \emptyset,$$

$$\{(a_1, \dots, b_{n-1}, a_n)\}' = \{a_1\}' \times \dots \times \{b_{n-1}\}' \times \{a_n\}' \neq \emptyset.$$

Inoltre se  $x \in \{a_n\}'$  si ha che

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \in \{(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)\}'$$

e quindi, per il teorema 2.1 di [1],

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \overline{\{(a_1, \dots, a_{n-1}, x)\}}.$$

Analogamente si ottiene che

$$(a_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \in \overline{\{(a_1, \dots, b_{n-1}, x)\}}.$$

Quindi vi sono due punti distinti con derivato non vuoto e due punti distinti con shell non vuoto. In modo analogo si procede nel secondo caso.

Osservazione 5.3 - Il comportamento degli spazi  $T_{\frac{1}{2}}$  rispetto al prodotto è stato studiato in [5].

Prendiamo ora in esame gli assiomi  $T_D$ ,  $T_B$ ,  $R_0$ .

Proposizione 5.4 ([10]) - Un prodotto finito è  $T_D$  se, e soltanto se, ogni fattore è  $T_D$ .

Il problema per i prodotti infiniti è stato posto da Thron in [10] e da noi com

pletamente risolto.

Proposizione 5.5 - Condizione necessaria e sufficiente affinché un prodotto in finito  $X = \prod_{i \in I} X_i$  sia  $T_D$  è che tutti i fattori siano  $T_D$  e tutti, tranne al più un numero finito,  $T_1$ .

Dim: Sufficienza. Sia  $\{X_i\}_{i \in F}$  la famiglia finita di spazi  $T_D$  ma non  $T_1$ . Sia  $(x) = (x_i)_{i \in I}$  un punto del prodotto. Per ogni  $i \in F$ ,  $\{x_i\} = A_i \cap C_i$ ,  $A_i$  aperto e  $C_i$  chiuso di  $X_i$  (cfr. prop. 2.1). Si ha che

$$\{(x)\} = \left( \prod_{i \in F} A_i \times \prod_{j \notin F} X_j \right) \cap \left( \prod_{i \in F} C_i \times \prod_{j \notin F} \{x_j\} \right)$$

si può scrivere come intersezione di un aperto e di un chiuso.

Necessarietà. Sia  $X = \prod_{i \in I} X_i$   $T_D$ . Ogni  $X_i$  è  $T_D$  in quanto omeomorfo ad un sottospazio di  $X$ . Supponiamo per assurdo che l'insieme  $J$  degli indici relativi agli spazi non  $T_1$  sia finito. Per ogni  $j \in J$  sia  $y_j$  un punto di  $X_j$  tale che  $\overline{\{y_j\}} \neq \{y_j\}$ . Consideriamo il punto

$$\{(z)\} = \prod_{j \in J} \{y_j\} \times \prod_{i \notin J} \{x_i\},$$

ove  $x_i$  è un punto arbitrario di  $X_i$  ed  $y_j$  è scelto in  $X_j$  nel modo anzidetto. Poichè  $X$  è  $T_D$ ,  $\{(z)\}$  deve scriversi come intersezione di un aperto e di un chiuso, ossia deve essere

$$(*) \quad \{(z)\} = \left( \prod_{i \in J} \overline{\{y_j\}} \times \prod_{i \notin J} \{x_i\} \right) \cap A.$$

Indichiamo con  $F$  l'insieme finito d'indici determinato dalle coordinate la cui variabilità è limitata da  $A$ . Sia, ora,  $j_0 \in J - F$ .  $A$  non vincola la coordinata  $j_0$  e poichè  $\overline{\{y_{j_0}\}} \neq \{y_{j_0}\}$  la scrittura (\*) non può sussistere.

In [6] P.W. Harley III e G.F. McNulty hanno stabilito che la proprietà di essere  $T_B$  è contabilmente produttiva, ma, esibendo un controesempio, non produttiva. Nella successiva proposizione diamo una risposta definitiva al problema.

Proposizione 5.6 - Un prodotto  $X = \prod_{i \in I} X_i$  è  $T_B$  se, e soltanto se, tutti i fattori sono  $T_B$  e tutti, tranne al più un'infinità numerabile,  $T_1$ .

Dim: Sufficienza. Sia  $\{X_l\}_{l \in L}$  la sottofamiglia numerabile di  $I$  costituita da spazi  $T_B$  ma non  $T_1$ ; sia  $z = (z_i)_{i \in I}$  un punto di  $X$ . Per ipotesi si ha che per ogni  $l \in L$

$$\{z_l\} = (F_l) \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^1 \right)$$

con  $F_l$  ed  $A_n^1$  rispettivamente chiuso ed aperto in  $X_l$  (cfr. prop. 2.2). Si ottiene

$$\prod_{l \in L} \{z_l\} = \bigcap_{l \in L} \left[ \pi_l^{-1} \left( (F_l) \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^1 \right) \right) \right],$$

onde

$$\{z\} = \left( \prod_{i \in L} F_i \times \prod_{j \in I-L} \{z_j\} \right) \cap \left( \bigcap_{i \in L} (\pi_i^{-1} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^1 \right)) \right),$$

e quindi, sempre per la prop. 2.2,  $X$  è  $T_B$ .

Necessarietà. Sia  $X = \prod_{i \in I} X_i$   $T_B$ . Ogni  $X_i$  è  $T_B$  in quanto omeomorfo ad un sottospazio di  $X$ . Supponiamo ora che la cardinalità dell'insieme  $J$  degli indici relativi agli spazi  $T_B$  ma non  $T_1$  sia strettamente maggiore del numerabile. Per ogni  $j \in J$  sia  $y_j$  un punto di  $X_j$  tale che  $\{\overline{y_j}\} \neq \{y_j\}$ . Consideriamo un punto  $z$  di  $X$  del tipo

$$\prod_{j \in J} \{y_j\} \times \prod_{i \in I-J} \{x_i\},$$

ove  $x_i$  è un punto arbitrario in  $X_i$  ed  $y_j$  è scelto nel modo sopra precisato in  $X_j$ . Poichè  $X$  è  $T_B$ ,  $\{z\}$  si dovrebbe scrivere come

$$\overline{\{z\}} \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right),$$

ove  $A_n$  è aperto in  $X$ . Sia, ora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  l'insieme finito di indici determinato dalle coordinate la cui variabilità è limitata da  $A_n$ . Posto  $T = \bigcup_n F_n$ , si ha che  $T$  è al più numerabile e quindi esiste  $j_0 \in J - T$ , ossia  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  non vincola la coordinata  $j_0$ -esima. Segue subito che  $\{z\}$  non può essere un sottoinsieme di Borel.

**Proposizione 5.7** - Condizione necessaria e sufficiente affinché un prodotto  $X = \prod_{i \in I} X_i$  sia  $R_0$  è che lo siano i fattori.

Dim: Questo risultato è ben noto.

**Proposizione 5.8** - Un prodotto finito di spazi  $T_R$  è  $T_R$ .

Dim: Sia  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  e sia  $x \in X$  tale che  $\{x\}^{\circ} \neq \emptyset$ . Poichè

$$\{x\}^{\circ} = \{x_1\}^{\circ} \times \dots \times \overline{\{x_n\}} \cup \dots \cup \overline{\{x_1\}} \times \dots \times \{x_n\}^{\circ},$$

esiste un indice  $i_0$  tale che  $\{x_{i_0}\}^{\circ} \neq \emptyset$ . Ma  $X_{i_0}$  è  $T_R$  e quindi esiste  $C_{i_0} \subset \{x_{i_0}\}^{\circ}$ , con  $C_{i_0}$  chiuso non vuoto di  $X_{i_0}$ . Ne segue che  $C_{i_0} \times \prod_{i \neq i_0} \overline{\{x_i\}}$  è un chiuso non vuoto contenuto in  $\{x\}^{\circ}$ .

**Proposizione 5.9** - Un prodotto finito di spazi  $T_N$  è  $T_N$ .

Dim: Analoga alla precedente.

**Proposizione 5.10** - Un prodotto finito di spazi  $C_D$  è  $C_D$ .

Dim: Supponiamo per assurdo che  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  non sia  $C_D$ . Allora esiste un punto  $y \in X$  tale che  $\{y\}^t \neq \emptyset$  ed esiste un aperto  $A$  del tipo  $\prod A_i$  contenente  $y$  ad intersezione vuota con  $\{y\}^t$ , (cfr.prop.2.7). Indichiamo con  $F$  l'insieme non vuoto degli indici relativi alle coordinate di  $y$  aventi derivato non vuoto. Poichè per assurdo,  $\{y\}^t \cap A = \emptyset$ , si ha che gli spazi aventi indice in  $F$  non sono  $C_D$ , contro il supposto.

Proposizione 5.11 - Un prodotto finito di spazi  $C_0$  è  $C_0$ .

Dim: Sia  $X = \prod_{i=1}^n X_i$  e sia  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  tale che  $\{x\}^t \neq \emptyset$ . Sia  $F$  l'insieme non vuoto degli indici per cui  $\{x_i\}^t \neq \emptyset$ . Per ogni  $i \in F$  esiste  $y_i \in \{x_i\}^t$  che risulta contenuto in ogni aperto  $A_i$  passante per  $x_i$ . Posto  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , ove  $z_i = y_i$  per ogni  $i \in F$  e  $z_i = x_i$  per ogni  $i \notin F$ , si ha subito che  $z \in \{x\}^t$  ed ogni aperto  $A$  di  $X$  passante per  $x$  contiene anche  $z$ .  $X$  è quindi  $C_0$  per la prop.2.6.

Osservazione 5.4 - Non siamo riusciti a stabilire condizioni necessarie per il prodotto relativamente a quest'ultimo gruppo di assiomi. Anzi, per l'assioma  $C_N$  non è chiaro se il prodotto anche finito di spazi  $C_N$  è ancora  $C_N$ . Vale la seguente ovvia condizione sufficiente.

Proposizione 5.12 - Condizione sufficiente affinché un prodotto finito sia  $C_N$  è che tutti i fattori siano  $T_1$  tranne al più uno che è  $C_N$ .

#### B I B L I O G R A F I A

- [1] C.E. Aull - W.J.Thron; "Separation axioms between  $T_0$  and  $T_1$ ".  
Ind.Math.; 42 (1962), 23-37.
- [2] A.Conte; "Proprietà di separazione della topologia di Zariski di uno schema"; Ist.Lomb. A 106 (1972), 79-111.
- [3] D.E.Dobbs - M.Fontana - I.J.Papick; "On certain distinguished spectral sets"; Ann.di Mat. IV, tomo CXXVIII(1981), 227-240
- [4] J.Dugundji; Topology; Allyn and Bacon, 1966.
- [5] W.Dunham, " $T_{\frac{1}{2}}$  spaces"; Kyngpook Math.J.; 17, 2 (1977), 161-169.
- [6] P.W.Harley III - G.F.McNulty; "When is a point Borel?"; Pac.of Math.; 80, 1 (1979), 151-157.
- [7] M.N.Jha; "Separation axioms between  $T_0$  and  $T_1$ "; Prog.Math.; 11, (1977), 1-4.
- [8] N.Levine; "Generalized closed sets in Topology"; Rend.Circ.Mat.Palermo, 19, (1970), 89-96.

- [9] S.A.Naipally; "On  $R_0$  topological spaces"; Univ. of Alberta, Preprint, 1965.
- [10] W.J.Thron; Topological structures; Holt-Rineart and Winston, New York, 1966.
- [11] M.W.Warner; "Some separation axioms weaker than  $T_1$ "; Bull. Mat. Math. Soc.; 6, 3 (1975), 28-34.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, M. Curzio, D. Greco.

UN'OSSERVAZIONE SULLE FUNZIONI ASSOLUTAMENTE CONTINUE  
CON DERIVATA PRIMA A VARIAZIONE LIMITATA

Nota di Maurizio Renzi\*

Presentata dal Socio Ordinario Antonio Avantaggiati

Adunanza del 19 Marzo 1983

SOMMARIO

Utilizzando il concetto di variazione prima e un teorema di J.GROBERG-M.KREIN si dà una rappresentazione del duale dello spazio delle funzioni assolutamente continue con derivata prima a variazione limitata .

SUMMARY

By using the concept of first variation and a theorem by J.GROBERG-M.KREIN we give a representation of the dual of the space of absolutely continuous functions with first derivative of bounded variation.

INTRODUZIONE

Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato dell'asse reale. Indichiamo con  $AC[a, b]$  lo spazio delle funzioni assolutamente continue e con  $BV[a, b]$  lo spazio delle funzioni a variazione limitata su  $[a, b]$ . Definiamo il seguente spazio:

$$AC_{BV}[a, b] = \left\{ f(x) \in AC[a, b] : f'(x) = v(x) \text{ q.o. } v(x) \in BV[a, b] \right\}$$

Sia ora  $f(x)$  una funzione misurabile su  $[a, b]$ . Consideriamo una partizione  $P = \{x_0 = a, \dots, x_N = b\}$  dell'intervallo  $[a, b]$ . Poniamo:

$$V_1(f; [a, b]) = \sup_P \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right|$$

La quantità  $V_1(f; [a, b])$  si chiama la variazione prima <sup>(1)</sup> della funzione  $f(x)$  sull'intervallo  $[a, b]$ .

In questa nota si dimostra inizialmente (lemma 3) che la quan-

(\*) Colle del Pero - 00039 ZAGAROLO (Roma)

tità  $V_1(f; [a, b])$  è una norma sullo spazio  $ACN_{BV}[a, b]$  ( i.e. le funzioni di  $AC_{BV}[a, b]$  tali che  $f(a) = f'_+(a) = 0$  ). Si prova in seguito che l'insieme delle funzioni convesse su  $[a, b]$  tali che:  $f'_-(b), f'_+(a)$  sono finiti e  $f(a) = f'_+(a) = 0$

è un cono contenuto in  $ACN_{BV}[a, b]$  che soddisfa la condizione  $\gamma$  nel senso di J. GROSBERG-M. KREIN ( definizione 4 ).

Utilizzando allora un lemma di J. GROSBERG-M. KREIN ( lemma 6 ) si dimostra ( teorema 7 ) che ogni funzionale lineare e continuo sullo spazio  $ACN_{BV}[a, b]$  si spezza nella differenza di due funzionali che sono positivi sul cono delle funzioni convesse. Di una estensione del teorema 7 ad  $R^n$  nell'ambito delle funzioni subarmoniche si tratterà in un prossimo lavoro.

Sussiste il seguente:

LEMMA 1

Se  $f(x)$  è una funzione convessa su  $[a, b]$  e se  $f'_-(b)$  e  $f'_+(a)$  sono finiti, allora risulta:

$$V_1(f; [a, b]) = f'_-(b) - f'_+(a)$$

(1) La variazione prima di una funzione è stata introdotta inizialmente da de la Vallée Poussin [2] e utilizzata in seguito da Riesz [4] per i teoremi di rappresentazione per funzionali lineari e continui.

Successivamente Popoviciu [3] utilizzando differenze divise di ordine superiore generalizza il concetto di variazione prima introducendo la variazione n-ma di una funzione nell'ambito della teoria dell'interpolazione. Più recentemente Roberts-Varberg [5] utilizzano la nozione di variazione prima nella teoria delle funzioni a convessità limitata.

Dimostrazione.

È noto che se  $f(x)$  è una funzione convessa su  $[a, b]$  e se sono dati tre punti  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \in [a, b]$  tali che:

$$x_{k-1} \leq x_k \leq x_{k+1}$$

allora risulta:

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \geq 0$$

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} V_1(f; [a, b]) &= \sup_P \sum_{k=1}^{k=N-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \\ &= \sup_P \left[ \frac{f(b) - f(x_{N-1})}{b - x_{N-1}} - \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \right] = \sup_{a \leq x_{N-1} \leq b} \frac{f(b) - f(x_{N-1})}{b - x_{N-1}} + \\ &- \inf_{a \leq x_2 \leq b} \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = (\text{essendo, come è noto, il rapporto} \end{aligned}$$

incrementale di una funzione convessa una funzione non-decrescente dell'incremento) =

$$= \lim_{x_{N-1} \rightarrow b^-} \frac{f(b) - f(x_{N-1})}{b - x_{N-1}} - \lim_{x_2 \rightarrow a^+} \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = f'_-(b) - f'_+(a)$$

Q. E. D.

LEMMA 2

Sia  $f(x) \in AC_{BV}[a, b]$ . Allora risulta:

$$V_1(f; [a, b]) < +\infty$$

Dimostrazione

Per come è stato definito lo spazio  $AC_{BV}[a, b]$  abbiamo che

$$f'(x) = v(x) \text{ q.o.}$$

essendo  $v(x)$  una funzione a variazione limitata su  $[a, b]$ .  
Dal teorema di Jordan abbiamo che risulta:

$$v(x) = v_1(x) - v_2(x) \quad a \leq x \leq b$$

essendo  $v_1(x)$  e  $v_2(x)$  funzioni monotone non decrescenti.  
Integrando abbiamo allora:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x v_1(t) dt - \int_a^x v_2(t) dt$$

cioé:

$$f(x) = h(x) - k(x) \quad a \leq x \leq b$$

con  $h(x)$  e  $k(x)$  funzioni convesse su  $[a, b]$  (essendo come è noto l'integrale di una funzione non-decrescente una funzione convessa dell'estremo superiore di integrazione).  
Risulta allora:

$$V_1(f; [a, b]) \leq V_1(h; [a, b]) + V_1(k; [a, b]) = \text{dal lemma 1} = \\ h'_+(b) - h'_+(a) + k'_-(b) - k'_-(a) < +\infty$$

Q. E. D.

Introduciamo ora il seguente sottospazio di  $AC_{BV}[a, b]$

$$ACN_{BV}[a, b] = \{f(x) \in AC_{BV}[a, b] : f(a) = f'_+(a) = 0\}$$

Sussiste il seguente:

LEMA 3

L'applicazione  $f \longrightarrow V_1(f; [a, b])$  è una norma su  $ACN_{BV}[a, b]$

Dimostrazione

La proprietà di omogeneità e la disuguaglianza triangolare sono ovvie. Sia allora  $V_1(f; [a, b]) = 0$ . Abbiamo allora che qualunque sia la partizione  $P$  dell'intervallo  $[a, b]$  risulta:

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \left| \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} - \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} \right| = 0$$

da cui abbiamo che:

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} - \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} = 0$$

qualunque sia la terna  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \in [a, b]$ ; questo prova che  $f'_+(x)$  è costante (2)

Essendo  $f(x)$  continua abbiamo allora che  $f(x)$  è lineare; essendo inoltre  $f(a) = f'_+(a) = 0$  abbiamo allora che  $f(x)$  è identicamente nulla su  $[a, b]$ .

Q.E.D.

Consideriamo ora il seguente insieme:

$$\text{CONV}[a, b] = \left\{ f(x) \text{ definita su } [a, b]; f(x) \text{ convessa su } [a, b]; f'_-(b) \text{ finito}; f(a) = f'_+(a) = 0 \right\}$$

Si verifica immediatamente che  $\text{CONV}[a, b]$  è un cono contenuto nello spazio  $\text{ACN}_{BV}[a, b]$ .

(2) Infatti siano  $x_1$  e  $x_2$  due punti arbitrari di  $[a, b]$  con  $x_1 < x_2$ , e sia  $h$  un incremento positivo tale che:

$$x_1 < x_1 + h < x_2$$

Abbiamo allora:

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \frac{f(x_2)-f(x_1+h)}{x_2-(x_1+h)} = \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

da cui passando al limite per  $h \rightarrow 0^+$  otteniamo  $f'_+(x_1) = f'_+(x_2)$  cioè  $f'_+(x)$  è costante.

DEFINIZIONE 4 ( vedi [1] )

Sia  $S$  uno spazio normato e  $C$  un cono contenuto in  $S$ . Consideriamo l'ordinamento naturale indotto da  $C$  in  $S$  ( i.e.  $x \leq y$  se e solo se  $y - x \in C$  ). Sia  $\gamma \gg 1$  una costante. Si dice che  $C$  verifica la condizione  $\gamma$  se:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{comunque si prendono } y, x, z, \in C \\ \text{con: } y \leq x \leq z \quad \|y\| \leq 1 \quad \|z\| \leq 1 \\ \text{risulta: } \|x\| \leq \gamma \end{array} \right.$$

Chiaramente se  $C$  verifica la condizione  $\gamma$  con  $\gamma = 1$ ; allora a fortiori  $C$  verifica la condizione  $\gamma$  con  $\gamma > 1$ . Si vede inoltre facilmente che ad es. in  $R^n$  il cono  $R_+^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \text{ con } x_k \geq 0 \quad 1 \leq k \leq n \}$  verifica la condizione  $\gamma$  con  $\gamma = 1$ ; mentre sempre in  $R^n$  il cono  $C = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \text{ con } x_n > 0 \}$  non verifica la condizione  $\gamma$  con nessun  $\gamma$ .  
Sussiste il seguente:

LEMMA 5

Nello spazio  $ACN_{BV}[a, b]$  il cono  $CONV[a, b]$  verifica la condizione  $\gamma$  con  $\gamma = 1$ .

Dimostrazione

Sia  $f(x) \in CONV[a, b]$ ; allora dal lemma 1 e dal lemma 3 abbiamo che:

$$\|f\|_{ACN_{BV}[a, b]} = f'_-(b)$$

Ragioniamo per assurdo; supponiamo cioè che  $CONV[a, b]$  non verifichi la condizione  $\gamma$  con  $\gamma = 1$ . Allora esistono tre funzioni  $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$  tali che:

- 1)  $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h} \in CONV[a, b]$
- 2)  $\bar{f}'_-(b) \leq 1$ ;  $\bar{h}'_-(b) \leq 1$

$$3) \bar{c} - \bar{f} \in \text{CONV}[a, b] ; \bar{h} - \bar{g} \in \text{CONV}[a, b]$$

$$4) \bar{g}'(b) > 1$$

Dalla 3) abbiamo in particolare che la funzione  $\bar{h} - \bar{g}$  è convessa su  $[a, b]$ ; segue allora che:

$$\bar{h}'(b) - \bar{g}'(b) > 0$$

Abbiamo allora:

$$1 < \bar{g}'(b) < \bar{h}'(b) \leq 1$$

il che è assurdo.

Q.E.D.

Ricordiamo inoltre che se  $C$  è un cono contenuto in uno spazio normato  $S$ , il cono duale di  $C$  è l'insieme:

$$C' = \{T: \text{funzionali lineari e continui su } S \text{ con } T(u) \geq 0 \text{ } u \in C\}$$

Sussiste il seguente:

LEMMA 6 (Grosberg-Krein)

Sia  $S$  uno spazio normato e  $C$  un cono contenuto in  $S$ . Allora le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

i)  $C$  verifica la condizione  $\gamma$

ii)  $S'$  (duale topologico di  $S$ ) si rappresenta al modo seguente:

$$S' = C' - C'$$

(per la dimostrazione vedi ad es. [1]).

Possiamo allora concludere con il seguente:

TEOREMA 7

Sia  $T$  un funzionale lineare e continuo sullo spazio  $ACN_{BV}^{[a, b]}$ ; allora esistono due funzionali lineari e continui  $T_1$  e  $T_2$  che sono positivi sul cono  $\text{CONV}[a, b]$  e tali che:

$$T(f) = T_1(f) - T_2(f) \quad f \in ACN_{BV}[a, b]$$

Dimostrazione

Segue immediatamente dal lemma 6 e dal lemma 5.

Q.E.D.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] J. GROSBERG- M. KREIN: " Sur la décomposition des fonctionnelles en composantes positives ".  
C.R. Doklady Acad. Sci. URSS.(N.S.) 25 (1939) 723-726
- [2] C. de la VALLÉE-FOUSSIN: " Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées equidistantes ".  
Bull. Acad.Sci.Belg. 319-340 (1908)
- [3] T. POPOVICIU: " Les foctions convexes "  
Hermann Paris 1924
- [4] F. RIESZ: " Sur certain systems singuliers d'equation integrales ". Ann. Ecole Norm. 28, 33-62
- [5] A. W. ROBERTS-D. E. VARBERG: " Functions of bounded convexity "  
Bull. Amer. Math.Soc. 75, 568-572.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, M. Curzio, A. Franchetta.

SUI SISTEMI DI EQUAZIONI NON LINEARI ALLE DERIVATE  
PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO IPERBOLICO, IN  
DUE VARIABILI INDIPENDENTI

nota di Gaetano Caradonna

Presentata dal Socio Ordinario Antonio Avantaggiati  
Adunanza del 19 Marzo 1983

INTRODUZIONE

Utilizzando i risultati stabiliti da A. AVANTAGGIATI in [1],[2] e [3], in questa nota si studia un problema al contorno per un particolare sistema del secondo ordine di tipo iperbolico in due variabili indipendenti.

Nel n. 1 vengono studiati alcuni aspetti di un sistema differenziale di tipo ellittico del primo ordine posto in un cerchio, della cui circonferenza si determina un particolare ricoprimento. Nel N. 2 viene formulato il problema e nel n.3 si dimostra per esso un teorema di esistenza. A tal fine ci si serve di un sistema di equazioni che si basano sulla rappresentazione integrale usata in [1] e, inoltre, si utilizza un teorema di esistenza di elementi uniti, così come già fatto da noi in [4].

1. Indicati con  $S$  un cerchio di  $R^2$  e con  $C$  la sua circonferenza, si consideri il sistema

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} t_1(\lambda) + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} t_2(\lambda) = z_1(\lambda) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} t_1(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} t_2(\lambda) = z_2(\lambda) \end{cases} \quad \lambda \in \overset{\circ}{S},$$

con  $(t_1, t_2)$  e  $(z_1, z_2)$  coppie di funzioni rispettivamente di classe  $C^{(0, \alpha)}(S) \cap C^{(1)}(\overset{\circ}{S})$  e  $C^{(0, \alpha)}(\overset{\circ}{S})$ , e la forma quadratica ad esso associata

$$(1.2) \quad n_1(\xi)(u_1^2 - u_2^2) + 2n_2(\xi)u_1u_2 \quad \xi \in C,$$

essendo  $n_1(\xi)$  ed  $n_2(\xi)$  i coseni direttori della retta normale a  $C$  nel punto  $\xi$  orientata verso l'interno di  $C$ ; si ha che l'equazione secolare associata alla (1.2)

$$(1.3) \quad \det \begin{pmatrix} n_1(\xi) - \rho & n_2(\xi) \\ n_2(\xi) & -n_1(\xi) - \rho \end{pmatrix} = 0$$

ammette solo le radici semplici  $\rho_1=1, \rho_2=-1$ .

Perciò per il sistema (1.1) è verificata l'ipotesi  $I_6$  di [1]:

$\forall \xi \in C$  le radici dell'equazione in  $\rho$ (1.3) abbiano ciascuna ordine di molteplicità costante al variare di  $\xi$  in ogni regione connessa di  $C$ .

Come caso particolare del teorema (6.3) di [1]<sup>(1)</sup>, vale la se

(1) Avvertiamo che pur considerandosi in questo lavoro il caso in cui il numero  $n$  delle variabili indipendenti è maggiore di 2, i risultati sono validi anche per  $n=2$  (cfr. (16) di [3]).

guente

PROPOSIZIONE. - E' possibile determinare un ricoprimento  $\{B_1, B_2\}$  di  $C$  e, su  $B_1$  e  $B_2$  rispettivamente, le matrici ortogonali del secondo ordine  $(d_{rs}^{(1)})$  e  $(d_{rs}^{(2)})$ , essendo

$$d_{11}^{(1)} = \sqrt{\frac{1+n_1}{2}}, \quad d_{22}^{(1)} = -d_{11}^{(1)}, \quad d_{12}^{(1)} = d_{21}^{(1)} = \sqrt{\frac{n_2}{2(1+n_1)}}$$

$$d_{11}^{(2)} = \frac{n_2}{\sqrt{2(1-n_1)}}, \quad d_{22}^{(2)} = -d_{11}^{(2)}, \quad d_{12}^{(2)} = d_{21}^{(2)} = \sqrt{\frac{1-n_1}{2}}$$

di classe  $C^{(0, \alpha)}$  e verificanti la relazione, qualunque sia  $k=1, 2$

$$(1.4) \quad n_1(E)(u_1^2 - u_2^2) + 2n_2(E)u_1u_2 = \left( \sum_{r=1}^2 d_{1r}^{(k)}(E)u_r \right)^2 - \left( \sum_{r=1}^2 d_{2r}^{(k)}(E)u_r \right)^2, \quad \forall E \in B_k,$$

identicamente rispetto ai parametri  $u_1$  e  $u_2$ .

Infatti consideriamo la decomposizione di  $C$  in due archi  $D_1$  e  $D_2$ , a  $D_1$  appartenendo  $\bar{E}$  - per il quale  $n_1=1$  - e non  $\bar{E}$  - per il quale  $n_1=-1$  - e a  $D_2$  appartenendo  $\bar{E}$  e non  $\bar{E}$ ; per avere una sostituzione ortogonale che trasformi su  $D_k$  la forma quadratica (1.2) nella sua forma canonica, costruiamo  $(d_{rs}^{(k)})$  utilizzando la proposizione (6.IV) di [1]: consideriamo su  $D_1$  i due sistemi omogenei di due equazioni in due incognite aventi come matrici dei coefficienti rispettivamente

$$\mathcal{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} n_1(E)-1 & n_2(E) \\ n_2(E) & -n_1(E)-1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} n_1(E)+1 & n_2(E) \\ n_2(E) & -n_1(E)+1 \end{pmatrix};$$

una soluzione ortogonale e non nulla del primo [secondo] sistema è data da  $(d_{11}^{(1)}, d_{12}^{(1)}) [d_{21}^{(1)}, d_{22}^{(1)}]$ . Analogamente su  $D_2$ .

Si passa poi dalla decomposizione  $D_1, D_2$  al ricoprimento  $\{B_1, B_2\}$  utilizzando la continuità dei minori non nulli determinati di  $D_1$  e  $D_2$  e considerando due aperti  $B_1 \supset D_1$  e  $B_2 \supset D_2$  sui quali i detti minori sono ancora diversi da zero,  $B_1 [B_2]$  non comprendendo  $\bar{E} [\bar{E}]$ .

OSSERVAZIONE I. Se  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  si ha  $d_{rs}^{(1)} = \pm d_{rs}^{(2)}$  ( $r, s = 1, 2$ ), assumendo il segno  $+$  [ $+$ ] se  $B_1 \cap B_2$  appartiene alla parte superiore [inferiore] di  $C$ .

OSSERVAZIONE II. Le  $d_{rs}^{(k)}$  verificano le condizioni

$$n_1 (d_{i1}^{(k)} d_{j2}^{(k)} - d_{i2}^{(k)} d_{j1}^{(k)}) + n_2 (d_{i1}^{(k)} d_{j2}^{(k)} + d_{i2}^{(k)} d_{j1}^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \text{per } i \neq j \\ \rho_i, & \text{per } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2)$$

OSSERVAZIONE III. Supposto che il cerchio  $S$  abbia il centro coincidente con l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali ed il raggio uguale ad 1, indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo che il semiasse positivo delle ascisse forma con la normale esterna a  $C$  nel punto  $E$ . Si ha  $n_1(E) = -\cos\vartheta$ ,  $n_2(E) = -\sin\vartheta$ , e quindi

$$d_{11}^{(1)}(E) = \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad d_{12}^{(1)}(E) = -\cos \frac{\vartheta}{2}, \quad d_{11}^{(2)}(E) = \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad d_{12}^{(2)}(E) = -\cos \frac{\vartheta}{2}.$$

Assumeremo in seguito come archi  $D_1$  e  $D_2$  le due semicirconferenze aventi per estremi i punti  $E$  cui spettano  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  oppure  $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ .



$$(2.3) \quad g^{(h)} = \gamma^{(h,k)} g^{(k)} \left[ h^{(h)} = \delta^{(h,k)} h^{(k)} \right] \quad (2).$$

Diremo soluzione del problema (2.1) una coppia  $u = (u_1, u_2)$  di funzioni definite in  $S \times S$ , di classe  $C^{(2)}(\overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S})$  e tale che  $u_1, u_2, \frac{\partial}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2$  e  $-\frac{\partial}{\partial y_2} u_1 + \frac{\partial}{\partial y_1} u_2$  sono  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$ .

Posto

$$A_{11}(t_1, t_2) = -A_{22}(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_1^2 + t_2^2}$$

$$A_{12}(t_1, t_2) = A_{21}(t_1, t_2) = \frac{t_2}{t_1^2 + t_2^2}, \quad t_1^2 + t_2^2 > 0$$

e per  $r, s = 1, 2$

$$\alpha_{rs} = \begin{cases} 0, & \text{se } r = s \\ (-1)^r, & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

$$M_{rs}(\lambda - \bar{\lambda}) = M_{rs}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1, \lambda_2 - \bar{\lambda}_2) = \sum_{t=1}^2 \alpha_{rt} A_{ts}(-\lambda_2 + \bar{\lambda}_2, \lambda_1 - \bar{\lambda}_1),$$

si ha

$$M_{11}(\lambda - \bar{\lambda}) = \frac{(-1)^1 (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)}{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)^2 + (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)^2}; \quad M_{12}(\lambda - \bar{\lambda}) = M_{21}(\lambda - \bar{\lambda}) =$$

$$= \frac{-(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)}{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)^2 + (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)^2}.$$

(2) Le ipotesi (2.2) e (2.3) implicano l'equivalenza su  $(B_1 \cap B_2) \times S[S \times (B_1 \cap B_2)]$  delle condizioni al contorno assegnate separatamente su  $B_1 \times \overset{\circ}{S}$  e  $B_2 \times \overset{\circ}{S}[S \times B_1$  ed  $S \times B_2]$ .

Si prova facilmente (cfr. peraltro [2] e [3]) che  $(M_{rs}(\lambda - \bar{\lambda}))$  è una matrice fondamentale (3) del sistema (1.1).

Formulata l'ipotesi

A)  $\forall k \in \{1, 2\}$  e  $\forall \xi = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \in B_k$ :

$$\cos \vartheta \left[ e_1^{(k)2}(\vartheta) - e_2^{(k)2}(\vartheta) \right] + 2 \sin \vartheta e_1^{(k)}(\vartheta) < 0 \quad (4)$$

da questa consegue facilmente la proprietà

A<sub>1</sub>)  $\forall k \in \{1, 2\}$  la radice dell'equazione in  $\rho$

$$\det \begin{pmatrix} -\cos \vartheta - \rho & -\sin \vartheta & e_1^{(k)}(\vartheta) \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta - \rho & e_2^{(k)}(\vartheta) \\ e_1^{(k)}(\vartheta) & e_2^{(k)}(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

è negativa

e automaticamente la proprietà

A<sub>2</sub>)  $\forall k \in \{1, 2\}$  e  $\forall \xi = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \in B_k$ :

$$\left\{ \cos \vartheta \left[ e_1^{(k)2}(\vartheta) - e_2^{(k)2}(\vartheta) \right] + 2 \sin \vartheta e_1^{(k)}(\vartheta) e_2^{(k)}(\vartheta) \right\} \Delta^2 < 0, \quad \forall \Delta \neq 0.$$

E' verificata anche la proprietà

A<sub>3</sub>)  $\forall k \in \{1, 2\}$  e  $\forall \xi = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \in B_k$ :

(3) Cfr. [1], [5] e [6].

(4) In questa ipotesi e nelle successive proprietà dello stesso paragrafo assumiamo  $e_r^{(k)} = b_r^{(k)} \left[ e_r^{(k)} = c_r^{(k)} \right]$ .

$$\sum_{r,t}^2 (\delta_{rt} \pm i\alpha_{rt}) e_r^{(k)}(\vartheta) \left[ -\operatorname{sen}\left(t \frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} + \right. \\ \left. + \operatorname{cos}\left(t \frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] \neq 0.$$

Infatti essa equivale a

$$e_1^{(k)}(\vartheta) \left[ -\operatorname{cos}\vartheta \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] + e_2^{(k)}(\vartheta) \left[ -\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} - \right. \\ \left. - \operatorname{cos}\vartheta \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] \pm i \left\{ e_1^{(k)}(\vartheta) \left[ -\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} - \operatorname{cos}\vartheta \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] \right. \\ \left. + e_2^{(k)}(\vartheta) \left[ -\operatorname{cos}\vartheta \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} + \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] \right\} \neq 0$$

cioè a

$$e_1^{(k)}(\vartheta) \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} - e_2^{(k)}(\vartheta) \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \pm i \left[ e_2^{(k)}(\vartheta) \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} - e_1^{(k)}(\vartheta) \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} \right] \neq 0$$

che è vera, non potendo essere simultaneamente nulli la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario, in quanto ciò implicherebbe  $e_1^{(k)} = e_2^{(k)} = 0$ .

3. Siano  $x = (x_1, x_2) = (\rho \operatorname{cos} \gamma, \rho \operatorname{sen} \gamma)$  e  $y = (y_1, y_2) = (\sigma \operatorname{cos} \delta, \sigma \operatorname{sen} \delta)$  due generici punti di  $S$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2) = (\operatorname{cos} \tau, \operatorname{sen} \tau)$  e  $v = (v_1, v_2) = (\operatorname{cos} \omega, \operatorname{sen} \omega)$  due generici punti di  $C$ ; poniamo, per  $r = 1, 2$ ,

$$H_1(\alpha, \beta; \vartheta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} + \alpha \operatorname{sen} \left( \frac{\vartheta}{2} - \beta \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \operatorname{cos}(\beta - \vartheta)} \quad ; \quad H_2(\alpha, \beta; \vartheta) = \frac{-\operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} + \alpha \operatorname{cos} \left( \frac{\vartheta}{2} - \beta \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \operatorname{cos}(\beta - \vartheta)}$$

$$K_{1r}(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{-\bar{\alpha} \operatorname{cos} \left[ \bar{\beta} + (r-1) \frac{\pi}{2} \right] + \alpha \operatorname{cos} \left[ \beta + (r-1) \frac{\pi}{2} \right]}{\alpha^{-2} + \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha} \alpha \operatorname{cos}(\bar{\beta} - \beta)}$$

$$K_{2r}(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{-\bar{\alpha} \operatorname{sen}[\bar{\beta} + (r-1)\frac{\pi}{2}] + \alpha \operatorname{sen}[\beta + (r-1)\frac{\pi}{2}]}{\bar{\alpha}^2 + \alpha^2 - 2\bar{\alpha}\alpha \cos(\bar{\beta} - \beta)}$$

$$V(e^{(q)}(\vartheta); \vartheta; \chi) = \frac{e_1^{(q)}(\vartheta) \cos \frac{\vartheta}{2} + e_2^{(q)}(\vartheta) \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\chi - \vartheta}{2}}$$

$$Z_r(e^{(q)}(\vartheta); \vartheta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{(\cos \vartheta - \bar{\alpha} \cos \bar{\beta}) e_r^{(q)}(\vartheta) + (\operatorname{sen} \vartheta - \bar{\alpha} \operatorname{sen} \bar{\beta}) e_{r+1}^{(q)}(\vartheta)}{1 + \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha} \cos(\bar{\beta} - \vartheta)}$$

essendo per convenzione  $e_3^{(q)} = -e_1^{(q)}$ ; supposto verificata l'ipotesi A), consideriamo il sistema

$$(3.1) \left\{ \begin{aligned} u_s(\rho, \gamma; \sigma, \delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_s(\sigma, \delta; \omega) \varphi^{(1)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_s(\sigma, \delta; \omega) \varphi^{(2)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\delta} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 K_{sr}(\sigma, \delta; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) v_r(\rho, \gamma; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \\ v_s(\rho, \gamma; \sigma, \delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_s(\rho, \gamma; \tau) \psi^{(1)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_s(\rho, \gamma; \tau) \psi^{(2)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\gamma} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 K_{sr}(\rho, \gamma; \bar{\rho}, \bar{\gamma}) f_r(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta; u(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta)) \bar{\rho} d\bar{\rho}, s=1, 2 \end{aligned} \right.$$

con  $\varphi^{(q)}$  definita in  $S \times B_q$ , tale che  $\forall x \in S: \varphi^{(q)} \in C^{(0,\alpha)}(\{\theta\}_B)$  (5)  
 e  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  soluzione del sistema

$$(3.2) \quad \left[ \operatorname{sen} \frac{\chi}{2} c_1^{(q)}(\chi) - c \operatorname{cos} \frac{\chi}{2} c_2^{(q)}(\chi) \right] \varphi^{(q)}(\rho, \gamma; \chi) \\
 + \frac{1}{\pi} \int_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]}^* V(C^{(q)}(\chi; \chi; \omega)) \varphi^{(1)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}^* V(C^{(q)}(\chi; \chi; \omega)) \varphi^{(2)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega$$

$$= h^{(q)}(\rho, \gamma; \chi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\delta} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 Z_r(C^{(q)}(\chi; \chi; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) v_r(\rho, \gamma; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) d\bar{\sigma}$$

$$(\chi, \eta) = (\rho, \gamma; \chi) \in S \times B_q,$$

con  $\psi^{(q)}$  definita in  $B_q \times \hat{S}$ , tale che  $\forall \gamma \in \hat{S}: \psi^{(q)} \in C^{(0,\alpha)}(\{\theta\}_B)$ ,  
 $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$  soluzione del sistema

$$(3.3) \quad \left[ \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} b_1^{(q)}(\vartheta) - \operatorname{cos} \frac{\vartheta}{2} b_2^{(q)}(\vartheta) \right] \psi^{(q)}(\vartheta; \sigma, \delta) \\
 + \frac{1}{\pi} \int_{\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]}^* V(b^{(q)}(\vartheta; \vartheta; \tau)) \psi^{(1)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]}^* V(b^{(q)}(\vartheta; \vartheta; \tau)) \psi^{(2)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau$$

(5) Posto  $C^{(0,\alpha)}(B) = C^{(0,\alpha)}(B_1) \times C^{(0,\alpha)}(B_2)$ , indichiamo con  $C^{(0,\alpha)}(\{\theta\}_B)$  il sottoinsieme di  $C^{(0,\alpha)}(B)$  i cui elementi  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  verificano la condizione  $\varphi^{(1)} = \pm \varphi^{(2)}$ ,  $\forall \xi \in B_1 \cap B_2$ , assumendo il segno + o - secondo che  $\xi$  appartiene alla parte superiore o inferiore di C.

$$= g^{(q)}(\vartheta; \sigma, \delta) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{y} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 z_r^{(q)}(\vartheta; \vartheta; \bar{\rho}, \bar{\gamma}) f_r(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta; u(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta)) \bar{\rho} d\bar{\rho}.$$

$$(\bar{E}, \bar{Y}) = (\vartheta; \sigma, \delta) \in B_q \times \dot{S} \quad (6)$$

Intendiamo per soluzione del sistema (3.1) una quaterna  $(u_1, u_2, v_1, v_2)$  di funzioni continue in  $S \times S$ ,  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$  e soddisfacente le (3.1) stesse, con le  $\varphi^{(q)}$  e  $\psi^{(q)}$  vincolate a soddisfare rispettivamente i sistemi (3.2) e (3.3). In conseguenza della rappresentazione, le funzioni  $u_i$  e  $v_i$  hanno in  $\dot{S}$  derivate di qualsiasi ordine.

OSSERVAZIONE. Al riguardo notiamo che le funzioni  $f_r$  sono di classe  $C^{(0, \alpha)}(S)$ ,  $\forall y \in S$ , e che le funzioni  $\sin \frac{\omega}{2} \varphi^{(q)}(\rho, \gamma; \omega)$  e  $\cos \frac{\omega}{2} \varphi^{(q)}(\rho, \gamma; \omega) \left[ \sin \frac{\tau}{2} \psi^{(q)}(\tau; \sigma, \delta) \text{ e } \cos \frac{\tau}{2} \psi^{(q)}(\tau; \sigma, \delta) \right]$  sono  $\alpha$ -hölderiane,  $\forall x \in S$  [ $\forall y \in S$ ] (7).

Perciò anche i potenziali di dominio e di frontiera relativi alle  $u_i, v_i$  sono rispettivamente di classe  $C^{(0, \alpha)}(S)$  e  $C^{(0, \alpha)}(C)$ ,  $\forall x \in S$  [ $\forall y \in S$ ], e quindi le  $u_i, v_i$  sono  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $y[x]$  uniformemente rispetto ad  $x[y]$ .

Inoltre, dette  $t=(t_1, t_2)$  e  $z=(z_1, z_2)$  coppie di funzioni continue rispettivamente in  $S$  e su  $C$ , poniamo per  $s=1, 2$

$$\alpha_{1s}(\lambda) = \alpha_{1s}(r, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\bar{\varepsilon} \int_0^1 \frac{-\bar{r} \cos[\bar{\varepsilon} + (s-1)\frac{3}{2}\pi] + r \cos[\varepsilon + (s-1)\frac{3}{2}\pi]}{\bar{r}^2 + r^2 - 2r\bar{r} \cos(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)} t_s(\bar{r}, \bar{\varepsilon}) \bar{r} d\bar{r}$$

$$\alpha_{2s}(\lambda) = \alpha_{2s}(r, \varepsilon) = \int_0^{2\pi} d\bar{\varepsilon} \int_0^1 \frac{-\bar{r} \sin[\bar{\varepsilon} + (s-1)\frac{3}{2}\pi] + r \sin[\varepsilon + (s-1)\frac{3}{2}\pi]}{\bar{r}^2 + r^2 - 2r\bar{r} \cos(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)} t_s(\bar{r}, \bar{\varepsilon}) \bar{r} d\bar{r}$$

(6) Essendo valide le proprietà  $A_1)$  e  $A_2)$ , come conseguenza dell'ipotesi  $A)$ , e la proprietà  $A_3)$ , si ha che i sistemi (3.2) e (3.3) ammettono una ed una sola soluzione (cfr. [1]).

(7) Cfr. (9) di [4].

$$\beta_{1s}(\lambda) = \beta_{1s}(r, \epsilon) = \int_{[\zeta_1, \zeta_2]} \frac{-\cos \left[ \zeta + (s-1) \frac{3\pi}{2} \right] + \cos \left[ \epsilon + (s-1) \frac{3\pi}{2} \right]}{1+r^2-2r\cos(\zeta-\epsilon)} z_s(\zeta) d\zeta$$

$$\beta_{2s}(\lambda) = \beta_{2s}(r, \epsilon) = \int_{[\zeta_1, \zeta_2]} \frac{-\operatorname{sen} \left[ \zeta + (s-1) \frac{3\pi}{2} \right] + \operatorname{sen} \left[ \epsilon + (s-1) \frac{3\pi}{2} \right]}{1+r^2-2r\cos(\zeta-\epsilon)} z_s(\zeta) d\zeta$$

essendo  $[\zeta_1, \zeta_2]$  l'intervallo  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  oppure l'intervallo  $\left[ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$ .

Per qualunque  $r, s, p=1, 2$  siano  $K_1, K_2$  e  $K_3, K_4$  numeri positivi tali che, per ogni funzione  $t_s \in C^{(0, \alpha)}(S)$  e per ogni funzione  $z_s \in C^{(0, \alpha)}(C)$ , risulti rispettivamente (cfr. [1], [7], [8] e anche (8) di [4]).

$$(3.4) \quad |\alpha_{rs}(\lambda)| \leq K_1 \max_{\lambda} |t_s| ; \quad \left[ \alpha_{rs} \right]_{\alpha} \leq K_2 \max_{\lambda} |t_s|$$

$$(3.5) \quad |\beta_{rs}(\lambda)| \leq K_3 \max_{\tau} |z_s| ; \quad \left[ \beta_{rs} \right]_{\alpha} \leq K_4 [z_s]_{\alpha}.$$

Ciò premesso, in virtù delle (3.4) e (3.5) si ha relativamente alle (3.1)

$$\begin{aligned} & |u_s(x', y) - u_s(x'', y)| = |u_s(\rho', \gamma'; \sigma, \delta) - u_s(\rho'', \gamma''; \sigma, \delta)| \leq \\ & \leq \frac{K_3}{2\pi} \sum_{q=1}^2 \sum_{r=1}^2 \max_{\omega} \left| \operatorname{sen} \left[ \frac{\omega}{2} + (r-1) \frac{3\pi}{2} \right] \right| \left[ \varphi^{(q)}(\rho', \gamma'; \omega) - \varphi^{(q)}(\rho'', \gamma''; \omega) \right] + \\ & + \frac{K_1}{2\pi} \sum_{r=1}^2 \max_{(\sigma, \delta)} |v_r(\rho', \gamma'; \sigma, \delta) - v_r(\rho'', \gamma''; \sigma, \delta)|. \end{aligned}$$

Dalla  $\alpha$ -hölderianità delle  $v_r$  e delle  $\varphi^{(p)}$  segue la  $\alpha$ -hölderianità in  $S$  delle  $u_1$ .

Con analogo ragionamento si ha che la funzione  $y \in S \rightarrow v(\cdot, y)$  è di classe  $C^{(0, \alpha)}$ .

Dimostriamo il

TEOREMA (3.1).- *Nell'ipotesi A), l'esistenza di una soluzione per il problema (2.1) implica l'esistenza di una soluzione per il sistema (3.1), e viceversa.*

Posto per ogni coppia di funzioni  $t=(t_1, t_2)$

$$A_\lambda t = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_1} t_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} t_2, -\frac{\partial}{\partial \lambda_2} t_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda_1} t_2 \right),$$

detta u una eventuale soluzione del problema (2.1), poniamo

$$(3.6) \quad A_y u(x, y) = v(x, y) \quad (x, y) \in S \times \bar{S}.$$

Si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_1} u_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2(x, y) = v_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y_2} u_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial y_1} u_2(x, y) = -v_2(x, y) \\ c_1^{(k)}(\eta) u_1(x, \eta) + c_2^{(k)}(\eta) u_2(x, \eta) = h^{(k)}(x, \eta), \quad (x, \eta) \in S \times B_k \\ k = 1, 2 \end{array} \right. \quad (x, y) \in S \times \bar{S}$$

e quindi, tenuto conto della validità delle  $A_1, A_2$  e  $A_3$  ed in virtù delle formule (5.5) e dei teoremi (8.6) e (8.7) di [1], sono verificate le prime delle (3.1); in cui  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  è soluzione del sistema (3.2).

Dalla (3.6) e dalle (2.1) segue

$$\begin{aligned} A_x v(x, y) &= A_x A_y u(x, y) \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \right) u_1(x, y) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1} \right) u_2(x, y) \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1} \right) u_1(x, y) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_2} \right) u_2(x, y) \\ &= (f_1(x, y, u), f_2(x, y, u)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} v_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2(x, y) = f_1(x, y, u) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} v_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial x_1} v_2(x, y) = -f_2(x, y, u) \\ b_1^{(k)}(\xi) v_1(\xi, y) + b_2^{(k)}(\xi) v_2(\xi, y) = g^{(k)}(\xi, y), \quad (\xi, y) \in B_k \times \overset{\circ}{S} \end{cases} \quad (x, y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S}$$

$k=1, 2$

Sono allora verificate le seconde del sistema (3.1) in cui  $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$  è soluzione del sistema (3.3).

Viceversa sia  $(u^*, v^*)$  una soluzione del sistema (3.1). Dalle prime si ha

$$(3.7) \begin{cases} A_Y u^*(x, y) = v^*(x, y) & (x, y) \in S \times \overset{\circ}{S} \\ c_1^{(k)}(\eta) u_1^*(x, \eta) + c_2^{(k)}(\eta) u_2^*(x, \eta) = h^{(k)}(x, \eta), & (x, \eta) \in S \times B_k \end{cases}$$

$k=1, 2$

e dalle seconde

$$(3.8) \begin{cases} A_X v^*(x, y) = f(x, y, u^*) & (x, y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S} \\ b_1^{(k)}(\xi) v_1^*(\xi, y) + b_2^{(k)}(\xi) v_2^*(\xi, y) = g^{(k)}(\xi, y), & (\xi, y) \in B_k \times \overset{\circ}{S} \end{cases}$$

$k=1, 2$

e quindi

$$A_X A_Y u^*(x, y) = A_X v^*(x, y) = f(x, y, u^*) \quad (x, y) \in \overset{\circ}{S} \times \overset{\circ}{S}.$$

Dalla prima di (3.7) si ha inoltre

$$A_y u^*(\xi, y) = v^*(\xi, y) \quad (\xi, y) \in B_k \times \overset{\circ}{S}, \quad k=1, 2$$

e quindi, per la seconda di (3.8), risulta

$$b_1^{(k)}(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial y_1} u_1^* + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2^* \right) (\xi, y) + b_2^{(k)}(\xi) \left( -\frac{\partial}{\partial y_2} u_1^* + \frac{\partial}{\partial y_1} u_2^* \right) (\xi, y) = g^{(k)}(\xi, y)$$

$$(\xi, y) \in B_k \times \overset{\circ}{S}, \quad k=1, 2.$$

La  $u^*$  soddisfa quindi il problema (2.1).

Indicato ora con  $U$  lo spazio costituito dalle coppie  $u = (u_1, u_2)$  di funzioni continue in  $S \times S$ , ivi  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$ , con la norma definita da

$$\|u\|_U = \|u\|_{[C^\alpha(S \times S)]^2}$$

associamo al sistema (3.3), in cui sia  $u \in U$ , la trasformazione  $S_b$  che ad ogni  $\psi \in C^{(0, \alpha)}(\{0\}_B)$  associa  $\psi' = (\psi', (1), \psi', (2))$  definito dai primi membri di (3.3) stesso. Questo allora si scrive

$$S_b(\psi) = G,$$

avendo indicato con  $G$  il suo termine noto.

Poichè vale il teorema di esistenza ed unicità qualunque siano i termini noti, la trasformazione  $S_b$  ha inversa (che è chiusa) continua, per il teorema di BANACH; perciò

$$\psi = S_b^{-1}(G)$$

ed esistono due costanti positive  $H_1$  ed  $H_2$  tali che

$$\|\psi\|_{[C^\alpha(C \times S)]^2} \leq H_1 \|G\|_{[C^\alpha(C \times S)]^2}, \quad [\psi]_\alpha \leq H_2 [G]_\alpha.$$

Ma poichè le  $f_i$  sono limitate, esiste una costante positiva  $K$  tale che

$$\|G\|_{[C^\circ(C \times S)]^2} \leq K, \quad [G]_\alpha \leq K, \quad \forall u \in U$$

e quindi

$$\|\psi\|_{[C^\circ(C \times S)]^2} \leq H_1 K, \quad [\psi]_\alpha \leq H_2 K.$$

Indicato con  $A$  lo spazio costituito dalle coppie  $a = (a_1, a_2)$  di funzioni continue in  $S \times S$ , ivi  $\alpha$ -hòlderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$  e tali che per  $i=1,2; y \in S$

$$\max_x |a_i(x, y)| \leq \frac{2}{\pi} K_3 H_1 K + \frac{1}{\pi} K_1 F_0, \quad [a_i]_\alpha \leq \frac{2}{\pi} K_4 H_2 K + \frac{1}{\pi} K_2 F_0$$

essendo  $F_0 = \max\{F_{01}, F_{02}\}$ , con  $F_{0i} = \sup |f_i|$ , procediamo in modo analogo con il sistema (3.2), in cui il termine noto sia dato da

$$(3.9) \quad h^{(q)}(\rho, \gamma; \chi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\delta} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 z_r(c^{(q)}(\chi); \chi; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) a_r(\rho, \gamma; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) \bar{\sigma} d\bar{\sigma}$$

essendo  $(a_1, a_2) \in A$ .

Scritto il sistema sotto la forma  $S_c(\varphi) = H$ , dove  $H$  sta ad indicare il suo termine noto, si ha che  $\varphi = S_c^{-1}(H)$  e che esistono tre costanti positive  $\bar{H}_1, \bar{H}_2$  e  $\bar{K}$  tali che

$$\|\varphi\|_{[C^\circ(S \times C)]^2} \leq \bar{H}_1 \bar{K}, \quad [\varphi]_\alpha \leq \bar{H}_2 \bar{K}.$$

Indicato con  $E$  lo spazio costituito dalle coppie  $e = (e_1, e_2)$  di

funzioni continue in  $S \times S$ , ivi  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$  e tali che per  $i=1,2$ ;  $x \in S$

$$\max_y |e_i(x, y)| \leq \frac{2}{\pi} K_3 \bar{H}_1 \bar{K} + \frac{1}{\pi} 2 (2K_1 K_3 H_1 K + K_1^2 F_0)$$

$$[e_i]_\alpha \leq \frac{2}{\pi} K_4 H_2 K + \frac{1}{\pi} 2 (2K_2 K_3 H_1 K + K_1 K_2 F_0)$$

con la solita norma, dimostriamo il

TEOREMA (3.2). - *Nell'ipotesi A), il sistema (3.1) ammette almeno una soluzione*

Sia  $T$  la trasformazione che ad ogni coppia  $u \in U$  associa la coppia  $u^* = (u_1^*, u_2^*)$  data da

$$(3.10) \quad u_i^*(\rho, \gamma; \sigma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_i(\omega; \sigma, \delta) \psi^{(1)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_i(\omega; \sigma, \delta) \psi^{(2)}(\rho, \gamma; \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\sigma} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^2 K_{ir}(\sigma, \delta; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) a_r(\rho, \gamma; \bar{\sigma}, \bar{\delta}) d\bar{\sigma}$$

dove - essendo  $(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$  la soluzione del sistema (3.3.) - la coppia  $a$  è data da

$$(3.11) \quad a_i(\rho, \gamma; \sigma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(1)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(2)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\gamma} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 K_{ir}(\rho, \gamma; \bar{\rho}, \bar{\gamma}) f_r(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta; u(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta)) \bar{\rho} d\bar{\rho}, \quad i=1,2
 \end{aligned}$$

e  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  è la soluzione del sistema (3.2) in cui il termine noto è dato da (3.9).

In virtù delle (3.4) e delle (3.5), si ha  $\forall y \in S$  e per  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 |a_i(x, y)| & \leq \frac{k_3}{2\pi} \sum_{p=1}^2 \sum_{r=1}^2 \max_{\tau} \left| \text{sen} \left[ \frac{\tau}{2} + (r-1) \frac{3\pi}{2} \right] \psi^{(p)}(\tau; \sigma, \delta) \right| + \\
 & + \frac{k_1}{2\pi} \sum_{r=1}^2 \max_x |f_r(\rho, \gamma; \sigma, \delta; u)| \leq \frac{2}{\pi} K_3 H_1 K + \frac{1}{\pi} K_1 F_0
 \end{aligned}$$

$$[a_i]_{\alpha} \leq \frac{2}{\pi} K_4 H_2 K + \frac{1}{\pi} K_2 F_0.$$

Analogamente si ha  $\forall x \in S$  e per  $i=1, 2$

$$|u_i^*(x, y)| \leq \frac{2}{\pi} K_3 \bar{H}_1 \bar{K} + \frac{1}{\pi} (2K_1 K_3 H_1 K + K_1^2 F_0)$$

$$[u_i^*]_{\alpha} \leq \frac{2}{\pi} K_4 H_2 K + \frac{1}{\pi} (2K_2 K_3 H_1 K + K_1 K_2 F_0).$$

In modo analogo a quanto fatto per dimostrare il teorema (3.1) di [4] si prova che la trasformazione  $T$  è continua e che l'insieme  $T(E)$  è relativamente compatto.

Infatti, indicata con  $T_1$  la trasformazione che ad ogni coppia

$(u_1, u_2) \in U$  associa la coppia  $(a_1, a_2) \in A$  data dalle (3.11) (8), sia  $(u_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, u_2^n = (u_1^n, u_2^n)$ , una successione di elementi di  $U$  convergente ad  $u = (u_1, u_2) \in U$ .

Posto

$$T(u^n) = (a_1^n, a_2^n) \quad T(u) = (a_1, a_2)$$

risulta  $\forall y \in S$

$$\begin{aligned} |a_1^n(x, y) - a_1(x, y)| &\leq \frac{k_3}{2\pi} \sum_{p=1}^2 \sum_{r=1}^2 \max_{\tau} \left| \operatorname{sen} \left[ \frac{\tau}{2} + (r-1) \frac{3}{2\pi} \right] \right| \left[ \psi^{(q)}(\tau; \sigma, \delta; u^n) + \right. \\ &\left. - \psi^{(q)}(\tau; \sigma, \delta; u) \right] + \frac{k_4}{2\pi} \sum_{r=1}^2 \max_x |f_r(\rho, \gamma, \sigma, \delta; u^n(\rho, \gamma, \sigma, \delta)) - \\ &\quad - f_r(\rho, \gamma, \sigma, \delta; u(\rho, \gamma, \sigma, \delta))|. \end{aligned}$$

Perciò, anche per la continuità delle  $f_r$  e delle  $\psi^{(p)}$ , risulta

$$\lim_n a_1^n = a_1$$

e quindi

$$\lim_n T(a^n) = T(a).$$

Analogamente si prova che è continua la trasformazione  $T_2$  che ad ogni coppia  $(a_1, a_2) \in A$  associa la coppia  $(u_1^*, u_2^*) \in E$  data dalle (3.10) (9). Perciò  $T$  è continua in quanto composta mediante  $T_2$  e  $T_1$ .

Consideriamo ora una qualunque successione di elementi di  $U$ ,  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $u^n = (u_1^n, u_2^n)$ . Poichè i coefficienti di Hölder delle

(8) Si è già visto che tali funzioni sono  $\alpha$ -hölderiane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$ .

(9) Cfr. (8).

$$\begin{aligned}
 a_i^n(\rho, \gamma; \sigma, \delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(1)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau - \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(2)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\gamma} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 K_{ir}(\rho, \gamma; \bar{\rho}, \bar{\gamma}) f_r(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta; u^n(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta)) \bar{\rho} d\bar{\rho}
 \end{aligned}$$

sono equilimitati, si ha, per quanto già notato in (8) e (9), che esistono due costanti positive  $\bar{H}$  e  $\bar{H}$  tali che, per  $\epsilon \in ]\alpha, 1[$  e  $\forall x \in S$ , risulta

$$\left[ \int_0^{2\pi} d\bar{\delta} \int_0^1 \frac{-\left\{ \cos \left[ \chi + (S-1) \frac{3\pi}{2} \right] - \bar{\sigma} \cos \left[ \bar{\delta} + (S-1) \frac{3\pi}{2} \right] \right\} a_r^n(\rho, \gamma; \sigma, \delta)}{1 + \bar{\sigma}^2 - 2\bar{\sigma} \cos(\bar{\sigma} - \chi)} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \right]_{\epsilon} \leq \bar{H},$$

e poiché le  $c_s$  e le  $h$  sono di classe  $C^{(1)}$ ,

$$\left[ h^{(q)}(\rho, \gamma; \chi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\delta} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 z_r(c_r^{(q)}(\chi; \chi; \bar{\sigma}, \bar{\delta})) a_r^n(\rho, \gamma; \sigma, \delta) \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \right]_{\epsilon} \leq \bar{H}.$$

Dal sistema (3.2) segue che,  $\forall x \in S$ , i coefficienti di Hölder delle  $\varphi(x, \eta, u^n)$  sono equilimitate di ordine  $\epsilon$ ; perciò ogni successione  $(\varphi(x, \eta, u^n))_{n \in \mathbb{N}}$  ha, per  $x \in S$ , una estratta convergente in  $C^{(0, \alpha)}(C)$ ; perciò anche  $(u^{*n})_{n \in \mathbb{N}'}$ , per il teorema 2.1 di [8], ha una estratta convergente in  $C^{(0, \alpha)}(S)$ ,  $\forall x \in S$ .

Di conseguenza, essendo  $E$  chiuso e convesso, la trasformazione  $T$  ammette un elemento unito  $u_0$ , per il teorema di SCHAUDER.

Posto  $a = (a_1^*, a_2^*)$ , con

$$\begin{aligned}
 a_i^*(\rho, \gamma; \sigma, \delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(1)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} H_i(\tau; \rho, \gamma) \psi^{(2)}(\tau; \sigma, \delta) d\tau \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sum_{r=1}^2 K_{ir}(\rho, \gamma; \bar{\rho}, \bar{\gamma}) f_r(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta; u_0(\bar{\rho}, \bar{\gamma}; \sigma, \delta)) \bar{\rho} d\bar{\rho},
 \end{aligned}$$

si ha che  $(u_0, a^*)$ , tenuto conto che queste funzioni sono  $\alpha$ -hölde-  
riane rispetto ad  $x[y]$  uniformemente rispetto ad  $y[x]$ , rappresen-  
ta evidentemente una soluzione del sistema (3.1).

Dai teoremi (3.1), (3.2) segue il

TEOREMA (3.3). - *Nell'ipotesi A), il problema (2.1) ammette una  
soluzione.*

In un prossimo lavoro tratteremo, in particolare, il caso in  
cui le  $b_r^{(k)}$  e le  $c_r^{(k)}$  vengono assunte uguali alle  $d_r^{(k)}$ .

## B I B L I O G R A F I A

- [1] A. AVANTAGGIATI, Problemi al contorno per i sistemi ellittici simmetrici di equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine a coefficienti costanti in  $m(\geq 3)$  variabili indipendenti, *Annali di Mat. pura ed applicata*, (VI), Vol. LXI (1963), 193-258.
- [2] A. AVANTAGGIATI, Sulla matrice fondamentale per i sistemi ellittici del prim'ordine a coefficienti costanti in due variabili indipendenti, *Boll. U.M.I.*, (3), Vol. 18(1963), 185-196.
- [3] A. AVANTAGGIATI, Sui sistemi ellittici del primo ordine a coefficienti costanti, in due variabili indipendenti, *Rend. Acc. Naz. dei Lincei*, Vol. XXXIV(1963).
- [4] G. CARADONNA, Un problema al contorno per i sistemi ellittici di equazioni semilineari alle derivate parziali del primo ordine, *Note di Matematica*.
- [5] F. JOHN, The fundamental solutions of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. on Pure and Applied Math.*, 3(1950), pp. 273-304.
- [6] F. JOHN, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, *Interscience publishers, inc. New York* (1955).
- [7] C. MIRANDA, Sulle proprietà di regolarità di certe trasformazioni integrali, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, 7(1965), 303-336.
- [8] C. MIRANDA, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, U.M.I. 1978.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Avantaggiati, M. Curzio, A. Franchetta.

GRUPPI FINITI NON SUBMODULARI A QUOZIENTI PROPRI SUBMODULARI

Nota di Antonella LEONE e di Mercedes MAJ <sup>(°)</sup> <sup>(°°)</sup>

Presentata dal Socio Mario CURZIO  
Adunanza del 19/3/1983

Riassunto - Nella presente nota si determinano i gruppi finiti risolubili non submodulari a quozienti propri submodulari.

Abstract - In this note we determine the finite soluble groups which are not submodular, but all of whose proper homomorphic images are submodular.

Si ricorda che in un reticolo  $\mathcal{L}$  due intervalli primi  $[a / b]$  e  $[c / d]$  si dicono trasposti ( $[a / b] \tau [c / d]$ ) se  $a = b \vee c$ ,  $d = b \wedge c$  oppure  $c = a \vee d$ ,  $b = a \wedge d$ ; essi si dicono proiettivi ( $[a / b] \pi [c / d]$ ) se esiste una sequenza finita di intervalli primi:  $[a / b] = [x_1 / y_1]$ ,  $[x_2 / y_2]$ , ...,  $[x_n / y_n] = [c / d]$  tale che  $[x_i / y_i] \tau [x_{i+1} / y_{i+1}]$ .

La relazione  $\pi$  è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutti gli intervalli primi di  $\mathcal{L}$ , e si denota con  $K_{\mathcal{L}}$  il suo insieme quoziente.

Dicesi submodulare (cfr. [6]) un reticolo  $\mathcal{L}$  a catene limitate finite nel quale valgono le seguenti condizioni:

- S)  $x \vee y \geq y$  implica  $[p / q] \pi [x \vee y / y]$  se  $x \geq p \geq q \geq x \wedge y$  ;  
S)  $x \wedge y \leq y$  implica  $[p / q] \pi [y / x \wedge y]$  se  $x \leq q \leq p \leq x \vee y$  .

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).

(°°) Indirizzo degli autori:  
Istituto Matematico dell'Università  
via Mezzocannone, 8  
Napoli

Si dice submodulare ogni gruppo  $G$  il cui reticolo dei sottogruppi  $\mathfrak{L}(G)$  è submodulare.

In [5] F. Napolitani ha caratterizzato i gruppi finiti submodulari, mentre in un recente lavoro gli autori hanno determinato i gruppi finiti minimali non submodulari (cfr. [3]); nella presente nota si costruiscono i gruppi finiti risolubili non submodulari a quozienti propri submodulari.

Notazioni e nomenclature adoperate saranno quelle usuali (cfr. ad esempio [2] e [5]).

Lemma 1 Sia  $G$  un gruppo finito non submodulare a quozienti propri submodulari,  $P$  un  $p$ -sottogruppo di Sylow di  $G$  ( $p$  primo), e  $1 \neq N$  un sottogruppo normale di  $G$ , con  $N \wedge P = 1$ .

Allora, se  $Z(G/N) \wedge PN/N = 1$ , due qualunque intervalli primi di  $\mathfrak{L}(P)$  sono proiettivi in  $\mathfrak{L}(G)$ .

Dim.  $G/N$  è submodulare a quozienti submodulari. Se  $S/N$  è la componente  $\mathfrak{L}$ -indecomponibile di  $G/N$  contenente  $PN/N$ ,  $S/N$  è submodulare  $\mathfrak{L}$ -indecomponibile, per cui (cfr. [5]) esiste  $H/N \leq Z(S/N)$  tale che  $|K \mathfrak{L}(S/H)| = 1$ . Si ha ovviamente  $H/N \leq Z(G/N)$ , per cui  $PN/N \wedge H/N = 1$ , e quindi  $N = PN \wedge H = N(P \wedge H)$  e da  $P \wedge N = 1$  segue  $P \wedge H = 1$ .

Ma allora se  $[X/Y]$  e  $[Z/T]$  sono intervalli primi in  $\mathfrak{L}(P)$ ,  $[XH/H/YH/H]$  e  $[ZH/H/TH/H]$  sono intervalli primi in  $\mathfrak{L}(S/H)$ , quindi sono proiettivi, e in  $\mathfrak{L}(G)$  si ha  $[X/Y] \pi [XH/YH] \pi [ZH/TH] \pi [Z/T]$ , da cui  $[X/Y] \pi [Z/T]$ .  $\triangle$

Lemma 2 Sia  $G$  un gruppo finito non submodulare a quozienti propri submodulari, ed esista un  $p$ -sottogruppo di Sylow  $P$  di  $G$  dotato di un complemento normale e tale che due suoi intervalli primi non siano proiettivi in  $\mathfrak{L}(G)$ . Allora  $Z(G) = 1$ .

Dim. Sia  $\nu$  l'insieme dei primi  $q \mid |G|$  tali che  $G$  ha  $q$ -complemento normale e  $q$ -Sylow ciclici o quaternionali. Detto  $K = \prod_{q \in \nu} (G)$ , ed  $H$  un complemento di  $K$  in  $G$ , si ha  $G = [K]H$  e  $p \nmid |H|$ . Non essendo  $G$  submodulare, ma essendo submodulari i quozienti propri di  $G$ , risulta necessariamente  $Z(G) \wedge H = 1$  (cfr. [5]) e quindi  $P \wedge Z(G) = 1$ , e  $p \nmid |Z(G)|$ . Sia ora per assurdo  $Z(G) \neq 1$ . Non può essere  $Z(G/Z(G)) \wedge PZ(G)/Z(G) \neq 1$ , altrimenti esisterebbe  $L/Z(G) \triangleleft G/Z(G)$ , con  $|L/Z(G)| = p$ , e dal teorema di Schur-Zassenhaus si avrebbe  $L = Z(G) \times \bar{P}$ , con  $|\bar{P}| = p$ ,  $p \nmid |Z(G)|$ , da cui  $\bar{P} \triangleleft G$ .

Ma allora, poichè  $G$  è  $p$ -nilpotente e poichè un  $p$ -Sylow di  $G$  è ciclico o qua-

ternionale, si giungerebbe all'assurdo  $\bar{P} \leq P \wedge Z(G) = 1$ .

Pertanto è  $Z(G/Z(G)) \wedge PZ(G)/Z(G) = 1$  e dal Lemma 1 segue che due intervalli primi di  $\mathcal{A}(P)$  sono proiettivi in  $\mathcal{A}(G)$ , contro la scelta di  $P$ .  $\triangle$

Lemma 3 Sia  $G$  un gruppo finito non submodulare a quozienti propri submodulari, ed esista un  $p$ -sottogruppo di Sylow  $P$  di  $G$  dotato di complemento normale e tale che due suoi intervalli primi non siano proiettivi in  $\mathcal{A}(G)$ . Allora  $\phi(G) = 1$ .

Dim. Sia per assurdo  $\phi(G) \neq 1$ .  $P$  è ciclico o quaternionale (cfr. [5]) e  $G$  è  $p$ -nilpotente, pertanto non può essere  $P \wedge \phi(G) \neq 1$ , altrimenti si avrebbe  $\Omega_1(P)$  caratteristico in  $P \wedge \phi(G)$  caratteristico in  $\phi(G) \triangleleft G$ , cioè  $\Omega_1(P)$  normale in  $G$  e quindi  $\Omega_1(P) \leq Z(G)$ , contro l'essere  $Z(G) = 1$  (cfr. Lemma 2).

Allora  $P \wedge \phi(G) = 1$ , e, poichè esistono due intervalli primi di  $\mathcal{A}(P)$  non proiettivi in  $\mathcal{A}(G)$ , si ha  $Z(G/\phi(G)) \wedge P\phi(G)/\phi(G) \neq 1$  (cfr. Lemma 1). Posto allora  $\bar{P}\phi(G)/\phi(G) = P\phi(G)/\phi(G) \wedge Z(G/\phi(G))$ ,  $\bar{P}\phi(G)/\phi(G)$  è abeliano e normale in  $G/\phi(G)$  e pertanto vi ammette complemento. Se fosse  $\bar{P} < P$ , un  $p$ -sottogruppo di  $G/\phi(G)$  conterrebbe due sottogruppi di ordine  $p$ , essendo ciclico o quaternionale. Pertanto  $\bar{P}\phi(G)/\phi(G) = P\phi(G)/\phi(G)$  è normale in  $G/\phi(G)$  e vi ammette complemento normale. Ciò porta alla  $\mathcal{A}$ -decomponibilità di  $G/\phi(G)$  e quindi a quella di  $G$ , mentre ovviamente, essendo  $G$  non submodulare a quozienti propri submodulari,  $G$  è  $\mathcal{A}$ -indecomponibile.  $\triangle$

Teorema 1 Un gruppo finito  $G$  è supersolubile, non submodulare, a quozienti propri submodulari se, e solo se,  $G = [Q]A$ ,  $Q$  ciclico di ordine primo  $q$ ,  $Z(G) = 1$ ,  $A$  ciclico ed esiste un  $p$ -sottogruppo di Sylow  $P$  di  $A$  con  $|P| = p^2$ .

Dim. Sia  $G$  finito supersolubile non submodulare, a quozienti propri submodulari.  $G$  è ovviamente  $\mathcal{A}$ -indecomponibile e  $|K \mathcal{A}(G)| > 1$ . Ne segue (cfr. [5]) che esiste un  $p$ -sottogruppo di Sylow  $P$  di  $G$  dotato di due intervalli primi non proiettivi in  $\mathcal{A}(G)$ . Essendo  $G$  supersolubile,  $P$  è ciclico o quaternionale e ammette complemento normale in  $G$  (cfr. [1] e [5]).

Sia poi  $\nu$  l'insieme dei primi  $q \mid |G|$  tali che  $G$  ammette  $q$ -complemento normale e  $q$ -Sylow ciclici o quaternionali. Posto  $K = \bigcap_{q \in \nu} \nu_q(G)$ , e detto  $H$  un complemento di  $K$ , si ha  $G = [K]H$  e  $p \mid |H|$ .

Per il Lemma 2  $Z(G) = 1$ , per cui  $\mathcal{C}_G(\Omega_1(P)) < G$ ; esiste pertanto un primo  $r$

tale che un qualunque  $r$ -sottogruppo di Sylow di  $G$  non centralizzi  $\Omega_1(P)$ . Detto  $R_1$  un  $r$ -Sylow di  $G$ , risulta  $R_1 \leq K$  e da  $G = KN_G(R_1)$  segue che  $|P|$  divide  $|N_G(R_1)|$ . Esiste dunque un coniugato di  $P$ ,  $P^x$ , tale che  $R_1 \triangleleft R_1 P^x$ . Ma allora  $R = R_1^{x^{-1}}$  è normalizzato da  $P$  e  $P$  agisce fedelmente su  $R$ , essendo  $R \not\leq C_G(\Omega_1(P))$ . Sia ora  $Q$  il sottogruppo di Sylow relativo al massimo divisore primo di  $|G|$ .  $Q$  è normale in  $G$  e non ammette complemento normale; ne viene che  $Q \leq K$  e dal Lemma 1 segue subito  $Q \wedge R \neq 1^{(1)}$ , e quindi  $Q = R$ . Essendo inoltre  $\Phi(G) = 1$ , tale è  $\Phi(Q)$ , e  $Q$  risulta abeliano elementare.

Sia  $Q = \langle x_1 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle$  una decomposizione di  $Q$  in sottogruppi normali minimali di  $G$ , e si supponga  $n > 1$ . Il quoziente  $G/\langle x_1 \rangle$  è submodulare, ed è  $Z(G/\langle x_1 \rangle) \wedge P \langle x_1 \rangle / \langle x_1 \rangle \neq 1$  (cfr. Lemma 1). Ne segue che esiste un sottogruppo non banale  $P_1$  di  $P$  che centralizza  $\langle x_2 \rangle \times \dots \times \langle x_n \rangle$ . Ragionando analogamente su  $G/\langle x_2 \rangle$ , si prova l'esistenza di un sottogruppo non banale  $P_2$  di  $P$  che centralizza  $x_1$ . Ma  $P$  è ciclico o quaternionale, sicchè  $P_1 \wedge P_2$  è diverso da 1 e centralizza  $Q$ , contro il fatto che  $P$  opera fedelmente su  $Q$ .

Pertanto  $|Q| = q$  e, poichè  $P$  è, a meno di isomorfismi, un sottogruppo di  $\text{Aut}(Q)$ ,  $P$  è ciclico. Si consideri ora  $G'$ ;  $G'$  è nilpotente, da cui  $G' \wedge H = 1$  e, ricordato <sup>(1)</sup> che ogni sottogruppo normale di  $G$  incluso in  $K$  ha intersezione non identica con  $Q$ ,  $G' = Q$ . Di qui  $G/Q$  è abeliano, e da  $Z(G) = 1$  segue subito  $C_G(Q) = Q$  e  $A = C_q$  è ciclico. Poichè poi  $|K \cap G| \neq 1$  esiste un  $p$ -Sylow  $P$  di  $A$  con  $|P| \geq p^2$  (cfr. [5]).

Inversamente, sia  $G = [Q]A$ , con  $|Q| = q$ ,  $A$  ciclico,  $Z(G) = 1$ , e sia  $P$  un  $p$ -Sylow di  $A$  con  $|P| \geq p^2$ .  $G$  è allora ovviamente supersolubile, e non è submodulare, poichè, posto  $P = \langle x \rangle$ ,  $G$  è  $p$ -nilpotente e  $A = C_G(\langle x^p \rangle) = C_G(\langle x \rangle)$  (cfr. [5]). La submodularità dei quozienti propri di  $G$  discende poi subito dal fatto che, essendo  $G$  a centro identico, il sottogruppo  $Q$  è incluso in ogni sottogruppo normale di  $G$ , per cui ogni quoziente proprio di  $G$  è abeliano e quindi submodulare.  $\triangle$

(1) Più in generale, per ogni  $N \triangleleft G$ ,  $N \leq K$  si ha  $N \wedge Q \neq 1$ ; se infatti così non fosse, per il Lemma 1 e per le ipotesi fatte su  $P$ , si avrebbe  $Z(G/N) \wedge PN/N \neq 1$  e, scelto  $1 \neq aN \in Z(G/N) \wedge PN/N$  con  $a \in P$ , per ogni  $x \in Q$  risulterebbe  $x^{aN} = xN$ , cioè  $x^{-1} x^{aN} \in N \wedge Q = 1$ , e  $a \in C_G(Q)$ , mentre  $P$  agisce fedelmente su  $Q$ .

Lemma 4 Sia G un gruppo finito non submodulare a quozienti propri submodulari, ed esista un p-sottogruppo di Sylow P di G che ammetta complemento normale e tale che due suoi intervalli primi non siano proiettivi in  $\mathcal{R}(G)$ . Allora esiste un unico sottogruppo di G normale minimale.

Dim. P è ciclico o quaternionale (cfr. [1]), e (cfr. Lemma 2)  $Z(G) = 1$ .

Sia  $\nu$  l'insieme dei primi  $r \mid |G|$  tali che G ha r-complemento normale e r-Sylow ciclici o quaternionali. Posto  $K = O_{\nu}(G)$ , risulta  $G = [K]H$ , con H nilpotente a Sylow ciclici o quaternionali,  $(|K|, |H|) = 1$ , e si ha ovviamente  $P \leq H$ . Da  $Z(G) = 1$  segue poi l'esistenza di un q-sottogruppo di Sylow di K, Q, normalizzato da P e su cui P agisce fedelmente (cfr. la dimostrazione del Lemma 3). Sia  $N_1$  un sottogruppo normale minimale di G. Da  $Z(G) = 1$  e da H nilpotente a Sylow ciclici o quaternionali segue ovviamente<sup>(2)</sup> che  $N_1 \leq K$ . Sia ora  $N_2$  un altro sottogruppo normale minimale di G. Riesce ancora  $N_2 \leq K$ , e  $N_1 \wedge N_2 = 1$ . I quozienti  $G/N_1$  e  $G/N_2$  sono submodulari, e, detto  $\langle a \rangle$  il sottogruppo di P di ordine p, si ha  $aN_1 \in Z(G/N_1)$  e  $aN_2 \in Z(G/N_2)$  (cfr. Lemma 1).

Ma allora, se x è un generico elemento di Q, si ha  $a^{-1}x a N_1 = x N_1$ ,  $a^{-1}x a N_2 = x N_2$ , e  $[x, a] = x^{-1} a^{-1} x a \in N_1 \wedge N_2$ , cioè a centralizza Q, contro il fatto che P agisce fedelmente su Q.  $\triangle$

Lemma 5 Sia G un gruppo risolubile finito non submodulare a quozienti propri submodulari, ed esista un p-sottogruppo di Sylow P di G dotato di complemento normale e tale che due suoi intervalli primi non siano proiettivi in  $\mathcal{R}(G)$ . Allora  $G = [N]T$ , con N normale minimale in G,  $C_G(N) = N$ , T submodulare a quozienti submodulari, e  $T = [S]P$ , con  $\Omega_2(P) \leq C_T(S)$ .

Dim. P è quaternionale o ciclico di ordine maggiore di p (cfr. [1]); si ha (cfr. Lemmi 2 e 3)  $\Phi(G) = Z(G) = 1$ , e (cfr. Lemma 4) G possiede un unico sottogruppo normale minimale N.

Il sottogruppo di Fitting  $F(G)$  di G è quindi un q-gruppo (q primo) e da  $\Phi(G) =$

-----

(2) Se  $N_1 \not\leq K$ , allora  $N_1 \wedge K = 1$ , e  $N_1$  è contenuto in H. Ma allora  $N_1$  è un r-gruppo abeliano elementare (r primo), cioè  $N_1$  ha ordine primo, e si ha  $N_1 \leq Z(H)$  e  $N_1 \leq C_G(K)$ , cioè  $N_1 \leq Z(G)$ .

= 1 segue subito che  $F(G)$  è abeliano elementare e prodotto diretto di sottogruppi normali minimali di  $G$ . Pertanto è  $F(G) = N$ , e da  $C_G(F(G)) \leq F(G)$  segue subito  $C_G(N) = N$ .

Inoltre, poichè  $\Phi(G) = 1$ ,  $G = [N]T$  e  $T \simeq G/N$  è submodulare a quozienti submodulari. Per le ipotesi fatte su  $P$ , si può assumere ovviamente  $P \leq T$ , e da  $G$   $p$ -nilpotente segue che anche  $T$  è  $p$ -nilpotente. Sia allora  $T = [S]P$ , e si supponga per assurdo  $\Omega_2(P) \not\leq C_T(S)$ . Detta  $T_1$  la componente  $\mathcal{O}$ -indecomponibile di  $T$  contenente  $P$ , si ha  $T_1 = [K_1]H_1$ , con  $H_1$  nilpotente a Sylow ciclici o quaternionali,  $(|K_1|, |H_1|) = 1$ , e due qualunque intervalli primi di  $\mathcal{O}(K_1)$  proiettivi in  $\mathcal{O}(T_1)$  (cfr. [5]).

Si ha ovviamente  $P \leq H_1$  e da  $\Omega_2(P) \not\leq C_T(S)$  segue anche che  $\Omega_2(P) \not\leq C_{T_1}(K_1)$  (3).

Si verifica poi facilmente che, poichè due qualunque intervalli primi di  $\mathcal{O}(K_1)$  sono proiettivi in  $\mathcal{O}(G)$ , lo sono due qualunque intervalli primi di  $\mathcal{O}(NK_1)$  (cfr. [5]).

Inoltre, posto  $M = H_1 \wedge Z(T)$ , risulta  $K_{\mathcal{O}(T_1/M)} = 1$  (cfr. [5]).

Ma allora, se  $[A/B]$  è un intervallo primo di  $\mathcal{O}(P)$  con  $A \not\leq M$ , se  $[C/D]$  è un intervallo primo di  $\mathcal{O}(K_1)$  (4) e  $a \in N - \{1\}$ , si ha:

$[AM/M/BM/M] \pi [CM/M/DM/M]$  in  $\mathcal{O}(G/M)$ , e, in  $\mathcal{O}(G)$ ,  $[A/B] \tau [AM/BM] \pi \pi [CM/DM] \tau [C/D] \pi [ \langle a \rangle / 1 ]$ , e  $[A/B] \pi [ \langle a \rangle / 1 ]$ .

Se poi  $[A/B]$  è un intervallo primo di  $\mathcal{O}(P)$  con  $A \leq M$ , si ha  $|A| \leq p$  (5) e  $B = 1$ . Ma allora, posto  $C = [N]A$ , da  $C_G(N) = N$  segue  $|K_{\mathcal{O}(C)}| = 1$  e  $[A/B] \pi \pi [ \langle a \rangle / 1 ]$  (cfr. [5]). Ma allora due qualunque intervalli primi di  $\mathcal{O}(P)$  sono proiettivi in  $\mathcal{O}(G)$ , contro la scelta di  $P$ .  $\triangle$

(3) Si ha infatti  $T = A \times T_1$ , con  $(|A|, |T_1|) = 1$ ,  $T_1 = [S \wedge T_1]P$ , e  $S = A(S \wedge T_1)$ .

Dalla nilpotenza di  $H_1$  segue poi che  $P \wedge C_{T_1}(K_1) \leq P \wedge C_{T_1}(S \wedge T_1)$ . Se fosse

$\Omega_2(P) \leq C_{T_1}(K_1)$ , si avrebbe  $\Omega_2(P) \leq C_{T_1}(S \wedge T_1) \leq C_T(S)$ .

(4) Si noti che, poichè  $\Omega_2(P) \not\leq C_{T_1}(K_1)$ , è  $|K_1| > 1$ .

(5) Infatti, se  $P$  è quaternionale,  $|Z(P)| = 2$ , e da  $A \leq Z(T_1)$  segue subito che  $\dots$ .

Lemma 6. Sia  $G$  un gruppo risolubile finito non submodulare a quozienti propri submodulari, ed esista un  $p$ -sottogruppo di Sylow  $P$  di  $G$  tale che due suoi intervalli primi non sono proiettivi in  $\mathcal{R}(G)$ . Allora, se  $G$  non è  $p$ -nilpotente,  $G$  è di uno dei due tipi seguenti:

- i)  $G = [Q_8] \langle x \rangle$ ,  $x^3 = 1$ , e  $x$  opera non banalmente su  $Q_8$ ;  
 ii)  $|G| = 2^4 3$ ,  $G$  è a 2-Sylow quaternionali, ed esiste  $N \triangleleft G$ ,  $|N| = 2$  con  $G/N \simeq S_4$ .

Dim. Necessariamente  $|P| = 2^n$  e  $P$  è quaternionale (cfr. [5]). Non esiste un sottogruppo  $N \triangleleft G$  di ordine dispari, altrimenti da  $G/N$  submodulare e non 2-nilpotente seguirebbe che due qualunque intervalli primi di  $\mathcal{R}(PN/N)$  sono proiettivi in  $\mathcal{R}(G/N)$  (cfr. [5]), e da  $P \wedge N = 1$  seguirebbe, per ogni coppia  $[A/B]$ ,  $[C/D]$  di intervalli primi di  $P$ ,  $[A/B] \pi [AN/BN] \pi [CN/DN] \pi [C/D]$ , contro le ipotesi fatte su  $P$ . Pertanto, detto  $F(G)$  il sottogruppo di Fitting di  $G$ , si ha  $|F(G)| = 2^m$  e, poichè  $G$  è risolubile,  $C_G(F(G)) \leq F(G)$ .  $F(G)$  è ciclico o quaternionale, e poichè  $G$  non è un 2-gruppo, riesce necessariamente  $F(G) \simeq Q_8^{(6)}$  e quindi  $C_G(F(G)) = N$  con  $|N| = 2$ . Ma allora  $G/N = G/C_G(F(G))$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $\text{Aut}(Q_8) \simeq S_4$ . Se  $G/N \simeq H \leq S_4$ ,  $|G| = 2^3 3$  e  $G$  è di tipo i). Se invece  $G/N \simeq S_4$ ,  $G$  è di tipo ii).  $\triangle$

Osservazione Un gruppo di tipo ii) del Lemma 6 è così generato:

$$G = \langle a, b, t, x \mid a^4 = b^4 = t^4 = x^3 = 1, \langle a, b, t \rangle \simeq Q_{16}, a^x = b, b^x = ab, x^t = x^2 \rangle \text{ e } |G| = 2^4 3 \text{ (cfr. [4]).}$$

Teorema 2 Sia  $G$  un gruppo risolubile finito.  $G$  non è submodulare, ma è a quozienti propri submodulari se, e solo se,  $G$  è di uno dei tre tipi seguenti:

- i)  $G = [Q_8] \langle x \rangle$ ,  $x^3 = 1$ ,  $x$  opera non banalmente su  $Q_8$ ;  
 ii)  $|G| = 2^4 3$ ,  $G$  è a 2-Sylow quaternionali, ed esiste  $N \triangleleft G$ ,  $|N| = 2$  tale

-----  
 $\cdot \cdot \cdot |A| \leq p$ . Se invece  $P$  è ciclico,  $|A| \leq p$  segue dal fatto che  $\Omega_2(P) \leq \leq C_T(K_1)$  e quindi  $\Omega_2(P) \leq Z(T_1)$ .

(0) Si ricorda che, se  $|H| = 2^n$  e  $H$  è ciclico o  $H \simeq Q_{2^m}$  con  $m \geq 3$ , un  $p'$ -ele-

che  $G/N \simeq S_4$ ;

iii)  $G = [N]T$  dove  $N$  è normale minimale in  $G$ ,  $C_G(N) = N$ ,  $T$  è submodulare a quozienti submodulari e  $T = [S]P$  con  $P$   $p$ -Sylow di  $G$  ciclico o quaternionale,  $|P| \geq p^2$  e  $\Omega_2(P) \leq C_T(S)$ .

Dim.  $G$  non è submodulare, pertanto esiste un  $p$ -Sylow  $P$  di  $G$  possedente due intervalli primi non proiettivi in  $\mathcal{L}(G)$  (cfr. [5]). Se  $G$  non è  $p$ -nilpotente,  $G$  è di tipo i) o ii) (cfr. Lemma 6); se invece  $G$  è  $p$ -nilpotente,  $G$  è di tipo iii) (cfr. Lemma 5).

Viceversa, ovviamente un gruppo di tipo i) o ii) è non submodulare a quozienti propri submodulari. Sia ora  $G$  di tipo iii) e si supponga per assurdo  $G$  submodulare. Da  $C_G(N) = N$  segue che  $Z(G) = 1$  e che  $G$  è  $\mathcal{L}$ -indecomponibile. Da  $Z(G) = 1$  segue poi  $|K_{\mathcal{L}(G)}| = 1$  (cfr. [5]). Inoltre si ha  $G = [K]P$  con  $K = NS$ , e da  $\Omega_2(P) \leq C_T(S)$  segue  $PC_G(\Omega_1(P)) = SP = T = PC_G(\Omega_2(P))$ , una contraddizione (cfr. [5]);  $G$  quindi non è submodulare. Se poi  $M \neq 1$  è un sottogruppo normale di  $G$ , allora  $M \geq N$  e  $G/M \simeq \frac{G/N}{M/N}$  è un quoziente di  $T$  ed è quindi

submodulare.  $\triangle$

-----  
 ./ mento che normalizza  $H$  lo centralizza.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Frigerio - Sopra le classi di proiettività dei quozienti primi nel reticolo dei sottogruppi di alcune classi di gruppi finiti, Accademia Patavina, LXXVII (1964/65).
- [2] D. Gorenstein - Finite groups, Harper and Row, New York (1968).
- [3] A. Leone, M. Maj - Gruppi finiti minimali non submodulari, in corso di pubblicazione su "Ricerche di Matematica".
- [4] P. Longobardi, M. Maj - Determinazione dei  $T_2$ -gruppi finiti, Ann. Mat. CXXXVIII (1981), pp. 85-121.
- [5] F. Napolitani - Submularità nei gruppi finiti, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 50 (1973), pp. 355-363.
- [6] O. Tamaschke - Submodulare Verbände, Math. Z., 74 (1960).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Franchetta, M. Curzio, A. Avantiaggiati.



"RESTRICTED ROTATION IN TERTIARY AMIDES. THE CRYSTAL  
STRUCTURE OF N-i-PROPYL,N-BENZYL-o-BROMOBENZAMIDE".

Nota di Ettore Benedetti<sup>1</sup>, Emilia

Broccoli<sup>2</sup> and Patrizio Grimaldi<sup>1</sup>,

presentata dal Socio Ordinario

Prof. Paolo Corradini

Adunanza del 19/3/83

Riassunto

Mediante diffrazione dei raggi X da cristallo singolo, si è determinata la struttura molecolare e cristallina della N-iso-propil,N-benzil-orto-bromobenzamide. Il sistema cristallino è ortorombico con gruppo spaziale P<sub>bca</sub> e le seguenti dimensioni della cella elementare: a= 13.452, b= 7.716, c= 30.895 Å e 8 molecole per cella elementare. La struttura è stata risolta con metodi Patterson e Fourier e raffinata con procedimenti di minimi quadrati fino ad un valore finale di R pari a 0.080 per le 2197 riflessioni indipendenti osservate. La molecola con eccezione del gruppo iso-propilico è descrivibile con tre piani: quello benzilico, quello ammidico e quello benzoilico. Il gruppo più ingombrante sull'atomo di azoto è in conformazione anti rispetto all'ossigeno carbonilico come già osservato nel para-cloro derivato. La conformazione osservata è piuttosto rigidamente fissata da interazioni fra atomi non legati. L'impacchettamento molecolare è stabilizzato da forze di van der Waals e interazioni dipolo-dipolo.

Abstract

The molecular and crystal structure of N-iso-propyl,N-benzyl-orto-bromobenzamide has been determined by single crystal X-ray diffraction. The crystal system is orthorhombic with space group P<sub>bca</sub> and unit cell dimensions: a= 13.452, b= 7.716, c= 30.895 Å and 8 molecules per unit cell. The structure has been solved by Patterson and Fourier methods and it has been refined by least squares procedures to a final R value of 0.080 for the observed 2197 independent reflections. The molecule, with the exception of the iso-propyl group is described with three planes: benzyl, amide and benzoyl planes. The bulkier group on the nitrogen atom is in anti conformation with respect to the carbonyl oxygen as already observed in the para-chloro derivative. The observed conformation is rigidly fixed by interactions between non-bonded atoms. The molecular packing is stabilized by van der Waals forces and dipole-dipole interactions.

Introduction

The structure, configuration and conformation of amides have been the subject of continued interest for several decades.

It is well known that rotation around the acyl-to-nitrogen bond, is restricted, leading to the existence of two geometric isomers, usually not separable due to the relatively low barrier to rotation (20 Kcal/mole<sup>(1)</sup>). Trigonal hybridization of the nitrogen and partial double bond character of the acyl-nitrogen

1. Istituto Chimico, Università di Napoli, Via Mezzocannone 4, 80134 Napoli, Italy.
2. Istituto di Chimica Biologica, 2<sup>a</sup> Facoltà di Medicina e Chirurgia, Via Pansini 5, 80100 Napoli, Italy.

bond could be responsible of the restricted rotation around the amide bond<sup>(2)</sup>.

In amides with phenyl substituents on the nitrogen atom, restricted rotation around the benzene-to-nitrogen bond has been demonstrated<sup>(3)</sup>. It has also been shown that a conformation in which the phenyl ring is turned out of the amide plane may result when the benzene ring is unsymmetrically substituted with ortho groups<sup>(4)</sup>.

We have, therefore, carried out a single crystal X-ray structure determination of a series of N-alkyl-N-benzyl-ortho-substituted benzamides<sup>(5)</sup> in order to gain more information on the general question of the structure, conformation and configuration of tertiary amides. In the present paper the crystal structure of N-i-propyl-N-benzyl-ortho-bromobenzamide is reported.

#### Experimental

Needle-like crystals of N-i-propyl,N-benzyl-o-bromobenzamide were grown from n-hexane solutions. Preliminary oscillation and Weissenberg photographs indicate the orthorhombic system with space group Pbc<sub>a</sub>. Precise unit cell dimensions were obtained by least-squares fitting of the  $2\theta$ ,  $\phi$ , and  $\chi$  setting angles of 25 reflections accurately centered on an automated diffractometer. Crystal data are reported in Table 1.

Table 1. Crystal data of N-i-propyl, N-benzyl-o-bromobenzamide.

Molecular Formula	C <sub>17</sub> H <sub>18</sub> NOBr
Molecular weight	332.25 a. m. u.
Crystal System	Orthorhombic
Space Group	Pbc <sub>a</sub>
Z	8 molecules/unit cell
a	13.452 (7) Å
b	7.716 (9) Å
c	30.895 (6) Å
V	3207.8 Å <sup>3</sup>
Density, observed (g/cm <sup>3</sup> )	1.36
Density calculated (g/cm <sup>3</sup> )	1.375
Radiation used	Ni-filtered CuK $\alpha$ ( $\lambda$ = 1.5418 Å)
Temperature	25°C
Number of independent reflections	2197

Intensity data were collected on a Philips PW-1100 automated diffractometer using nickel-filtered  $\text{CuK}\alpha$  radiation ( $\lambda = 1.5418 \text{ \AA}$ ) with the  $\theta$ - $2\theta$  scan mode in the range  $3$ - $120^\circ$  of  $2\theta$ , and a scan speed of  $0.067$  degree/sec. Background counts were collected at each scan extremum. Three check reflections in three different octants in reciprocal space were monitored every 100 reflections in order to detect any crystal decomposition or misalignment. The variation in their intensity was less than 3% throughout the data collection. A total of 2197 independent non-zero reflections was measured. Intensities and their standard deviations, based on counting statistics, were corrected in the usual way for Lorentz and polarization effects. No absorption was applied because of the size crystal ( $0.02 \times 0.02 \times 0.4 \text{ mm}$ ). The structure was solved by Patterson and difference Fourier techniques. Refinement was carried out by full-matrix least-square procedures with anisotropic thermal factor only for the bromine atom. Hydrogen atoms were clearly by difference Fourier when conventional R value was 0.10. Three final cycles of least-squares with isotropic temperature factors for the hydrogen atoms equal to the temperature factors of the carrier atom brought the final R value to 0.080 with a total of 86 adjusted parameters. The "goodness of fit" at the end of the refinement process was 2.4. Further refinement with anisotropic thermal factor for O, N and C atoms and isotropic thermal factor for H atoms was considered unnecessary because of the cost involved in the computations. Calculations were carried out on a PDP 11/34 Digital computer under the SDP system of crystallographic programs. Atomic scattering factors for Br, O, N and C were from the International Tables for X-ray Crystallography<sup>(6)</sup>; those for H atoms were from Stewart et al.<sup>(7)</sup>. The final atomic parameters, fractional coordinates and temperature factors are reported in Table 2.

Table 2. Final atomic parameters. Fractional coordinates have been multiplied by  $10^4$ .

ATOM	X/a	Y/b	Z/c	B
Br	2060(1)	841(1)	1443(1)	2.21(0.03)
O	-31(1)	-759(6)	753(1)	5.96(0.09)
N	-360(1)	1880(6)	1019(1)	4.68(0.10)
C(1)	1179(4)	1372(7)	613(2)	4.56(0.12)
C(2)	2049(4)	1419(8)	848(2)	5.23(0.13)
C(3)	2944(5)	1929(9)	646(2)	5.90(0.14)
C(4)	2951(5)	2316(10)	226(2)	6.50(0.14)

Table 2 (continuation)<sup>1</sup>

ATOM	X/a	Y/b	Z/c	B
C(5)	2094(5)	2237(10)	-19(2)	6.48(0.15)
C(6)	1208(4)	1765( 8)	174(2)	5.33(0.13)
C(7)	210(4)	766( 9)	806(2)	4.97(0.12)
C(8)	-1338(4)	1298( 8)	1171(2)	5.40(0.14)
C(9)	-1356(5)	682( 9)	1633(2)	5.79(0.14)
C(10)	-2112(5)	1172(10)	1904(2)	7.17(0.17)
C(11)	-2150(6)	590(12)	2329(3)	8.84(0.21)
C(12)	-1422(6)	-444(11)	2482(3)	8.39(0.20)
C(13)	-673(6)	-967(11)	2224(3)	7.98(0.19)
C(14)	-629(5)	-383( 9)	1796(2)	6.48(0.16)
C(15)	-56(4)	3755( 8)	1064(2)	5.62(0.14)
C(16)	-229(5)	4360(10)	1519(2)	7.65(0.18)
C(17)	-662(6)	4875(11)	738(2)	7.70(0.19)
HC(3)	3600	1970	820	5.97
HC(4)	3600	2740	80	6.31
HC(5)	2130	2520	-339	6.44
HC(6)	570	1660	-9	5.45
H1C(8)	-1579	340	970	5.21
N2C(8)	-1829	2290	1130	5.21
HC(10)	-2669	1970	1780	7.13
HC(11)	-2739	930	2520	9.18
HC(12)	-1419	-849	2800	8.72
HC(13)	-99	-1769	2340	7.73
HC(14)	-29	-759	1600	6.55
HC(15)	-629	3850	980	5.49
H1C(16)	200	3630	1730	7.11
H2C(16)	-919	4270	1620	7.11
H3C(16)	10	5600	1560	7.11
H1C(17)	-469	6100	760	7.43
H2C(17)	-1409	4780	800	7.43
H3C(17)	-559	4450	430	7.43

Standard deviations in the parameters were calculated from the diagonal elements

of the inverse matrices.

### Results and discussion

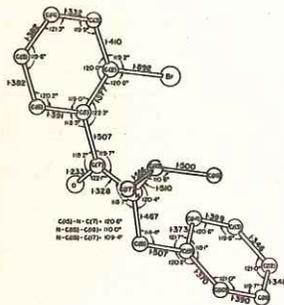


Fig. 1 - Molecular model of N-*i*-propyl, N-benzyl-*o*-bromobenzamide. Estimated standard deviations for bond lengths and bond angles are on the average 0.006 Å and 0.5°, respectively.

Figure 1 shows a projection of the molecule of N-*i*-propyl, N-benzyl-*o*-bromobenzamide with the final geometrical parameters. Bond lengths and bond angles do not show unusual values except slight distortions in bond angles which occur because of the need of releasing intramolecular interactions between non-bonded atoms.

The conformation of the molecule is such that the bulkier N-*i*-propyl group is *anti* to the carbonyl oxygen, in contrast with the conformation observed in N-*t*-butyl, N-benzyl-*o*-bromobenzamide where the bulkier group (*t*-butyl) was found to be *syn* to the carbonyl oxygen<sup>(5)</sup>. A list of dihedral angles is given in Table 3 where they are compared with those observed for the N-*t*-butyl a

nologue.

Table 3. Some relevant dihedral angles (degrees) for N-disubstituted *ortho*-bromobenzamide.

Dihedral Angle	N- <i>i</i> -propyl, N-benzyl	N- <i>t</i> -butyl, N-benzyl
C(2)-C(1)-C(7)-N	86	84
C(2)-C(1)-C(7)-O	-95	-96
C(6)-C(1)-C(7)-N	-99	-101
C(6)-C(1)-C(7)-O	80	78
C(1)-C(7)-N-C(15)	1	179
C(1)-C(7)-N-C(8)	175	-7
O-C(7)-N-C(8)	-4	173
O-C(7)-N-C(15)	-178	0
C(7)-N-C(8)-C(9)	95	109
C(7)-N-C(15)-C(16)	-136	-177
C(7)-N-C(15)-C(17)	102	61
N-C(8)-C(9)-C(10)	136	147
N-C(8)-C(9)-C(14)	-44	-36

Table 3 (continuation)<sup>1</sup>

Dihedral Angle	N- <i>i</i> -propyl,N-benzyl	N- <i>t</i> -butyl,N-benzyl
C(15)-N-C(8)-C(9)	-91	-78
C(16)-C(15)-N-C(8)	50	61
C(17)-C(15)-N-C(8)	-71	-59

The conformation observed in the present structure differs also from the conclusion on isomer composition of tertiary amides with different substituents on nitrogen which states that, except for formamides, the bulkier group on nitrogen would be syn to the carbonyl oxygen in solution for the major isomer<sup>(8)</sup>. In the conformation of N-*i*-propyl, N-benzyl-*o*-bromobenzamide all intramolecular contact are within acceptable values as shown in Figure 2. The conformation is

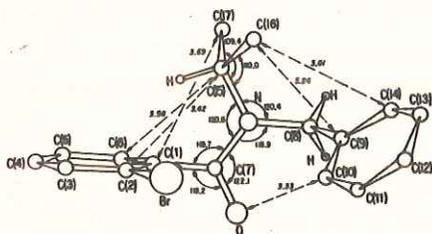


Fig. 2 - Some relevant intramolecular contacts observed in N-*i*-propyl, N-benzyl-*o*-bromobenzamide.

stabilized by Van der Waals interactions between non bonded atoms of the iso-propyl group and of the aromatic systems. A conformation with the benzyl group in anti position (and the iso-propyl in syn) with respect to the carbonyl oxygen, which ideally can be attained through a rotation of 180° around the C(7)-N bond, would give rise to unacceptable intramolecu-

lar contacts between atoms of the aromatic ring systems.

A slight deviation from planarity is observed for the amide group, reflected in the values of the dihedral angles C(1)-C(7)-N-C(8) and C(1)-C(7)-N-C(15) which are 175° and 1° respectively and a standard deviation of 0.03 Å. Except for the two methyls of the iso-propyl group, the molecule of N-*i*-propyl, N-benzyl-*o*-bromo benzamide can be described by three planes: benzoyl, amide and benzyl planes. The angle of twisting between the amide and the benzoyl planes is 97°.

In Figure 3 the mode of packing of the molecule as view along the b direction is given. The crystal is held together by Van der Waals and dipole-dipole interactions.

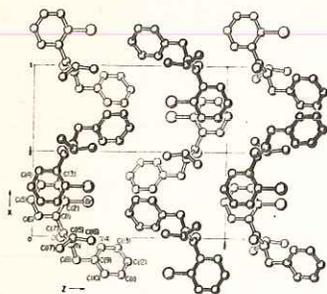


Fig. 3 - Mode of packing of N-isopropyl, n-benzyl-o-bromobenzamide as view along the b direction.

#### Acknowledgment

This work was supported by a grant from the Ministry of Education of Italy.

#### References

1. W. E. Stewart and T. H. Siddall, III, Chem. Rev., **70**, 517 (1970).
2. H. Kessler, Angew. Chem., **82**, 237 (1970).
3. R. Adams, Records Chem. Prog. (Koserge\_Hooker Sci. Lib.) **10**, 91 (1949).
4. Y. Shvo, E. C. Taylor, K. Mislow and M. Raban, J. Am. Chem. Soc., **89**, 4910 (1967) and references therein.
5. A. H. Lewin, M. Frucht, K. V. J. Chen, E. Benedetti and B. Di Blasio, Tetrahedron, **31**, 215 (1975).
6. "International Tables for X Ray Crystallography", Vol. III, Kinoch Press Birmingham, 1962, pp. 202.
7. R. F. Stewart, E. R. Davidson and W. T. Simpson, J. Chem. Phys., **42**, 3175 (1965).
8. L. A. La Planche and M. T. Rogers, J. Am. Chem. Soc., **85**, 3728 (1963).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, R. Sersale, L. Mangoni.



"RESTRICTED ROTATION IN TERTIARY AMIDES. THE CRYSTAL  
STRUCTURE OF N-i-PROPYL, N-BENZYL-p-CHLOROBENZAMIDE"

Nota di Ettore Benedetti<sup>1</sup>, Emilia

Broccoli<sup>2</sup> and Angela Di Nola<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Ordinario

Prof. Paolo Corradini

Adunanza del 19/3/83

Riassunto

E' stata determinata mediante diffrazione dei raggi X da cristallo singolo la struttura molecolare e cristallina della N-iso-propil, N-benzil-para-clorobenzamide. Le molecole cristallizzano nel sistema ortorombico, gruppo spaziale P<sub>bca</sub> con la seguente cella elementare: a = 19.762, b = 20.428, c = 7.496 Å ed 8 molecole per cella. La struttura è stata risolta applicando MULTAN ed è stata raffinata mediante minimi quadrati ad un R finale di 0.038 per 1106 riflessioni. La molecola può essere descritta, con l'eccezione del gruppo iso-propilico con tre piani: il piano benzilico, il piano ammidico ed il piano benzoilico. La conformazione osservata presenta il gruppo più ingombrante sull'atomo di azoto anti all'ossigeno carbonilico, similmente a quanto osservato per l'ortobromo derivato. Interazioni di van der Waals e dipolo-dipolo sono responsabili della costruzione dell'edificio cristallino.

Abstract

The crystal and molecular structure of N-iso-propyl, N-benzyl-para-chlorobenzamide has been determined by single crystal X-ray diffraction. The molecules crystallize in the orthorhombic system, space group P<sub>bca</sub> and unit cell dimensions: a = 19.762, b = 20.428, c = 7.496 Å and 8 molecules per unit cell. The structure has been solved with MULTAN and it has been refined by least squares procedure to a final R value of 0.038 for 1106 reflections. The molecule can be described with the exception of the iso-propyl group, with three planes: the benzyl plane, the amide plane and the benzoyl plane. The observed conformation presents the bulkier group on the nitrogen atom anti to the carbonyl oxygen similarly to the conformation observed for the orthobromo derivative. Van der Waals and dipole-dipole interactions are responsible for the building of the crystal.

Introduction

The study of the structure, configuration and conformation of amides has been a preferred subject of many researches in the last decades. X-ray crystal structure determinations of various amides have indicated that the amide nitrogen is nearly planar<sup>(1)</sup>. For tertiary amides it is observed that the barrier to rotation decreases with the bulk of the substituents<sup>(2)</sup> either on carbon or on nitrogen and this has been interpreted as a manifestation of increased energy of the

1. Istituto Chimico, Università di Napoli, Via Mezzocannone n° 4, 80134 Napoli, Italy.
2. Istituto Chimica Biologica, 2<sup>a</sup> Facoltà di Medicina e Chirurgia, Via Pansini 5, 80100 Napoli, Italy.

"nearly planar" ground state due to steric interactions. We have undertaken a structural study in the solid state of N-disubstituted benzamides<sup>(3)</sup> with ortho and para substitution on the phenyl ring in order to gain more information on the structure and conformational behavior of such compounds. We now report the X-ray crystal structure determination of the N-i-propyl, N-benzyl-p-chlorobenzamide and we compare the conformation of this compound with the conformations observed for analogous compounds previously determined by us<sup>(4)</sup>.

### Experimental

Prismatic crystals were grown from acetic solutions. Oscillation and Weissenberg photographs indicate the orthorhombic system with space group Pbc<sub>a</sub>. Cell dimensions were obtained from least squares fitting of the setting angles of 25 reflections accurately centered on a CAD 4 ENRAF NONIUS automated diffractometer. Crystal data are reported in Table 1.

Table 1. Crystal data of N-i-propyl, N-benzyl-p-chlorobenzamide.

Molecular Formula	C <sub>17</sub> H <sub>18</sub> NOCl
Molecular weight	287.79 a. m. u.
Crystal System	Orthorhombic
Space Group	Pbc <sub>a</sub>
Z	8 molecules/unit cell
a	19.762 (1) Å
b	20.428 (1) Å
c	7.496 (2) Å
V	3026.1 Å <sup>3</sup>
Density, observed (g/cm <sup>3</sup> )	1.26
Density, calculated (g/cm <sup>3</sup> )	1.263
Radiation used	Zr-filtered MoK <sub>α</sub> (λ = 0.71069 Å)
Temperature	25°C
Number of independent	
Reflections	1930

The X-ray data collection was carried out using Zr-filtered MoK<sub>α</sub> radiation (λ = 0.71069 Å) with the  $\theta$ -2 $\theta$  scan mode out to 45° of 2 $\theta$  and a scan range of 2.0°. The scan speed used was 2°/min. and two background counts were collected at each extremum of the scan. Three check reflections were monitored every 60 re-

flections; their decay at the end of the data collection was on the average less than 1% of the corresponding  $F$  values. A total of 1930 reflections was collected, 1106 of which had an intensity greater than  $3\sigma(I)$ . No absorption correction was applied because of the size of the crystal used (0.02 x 0.04 x 0.3 mm).

The structure was determined by a straightforward application of MULTAN<sup>(5)</sup> the phase-permutation computer program in its latest version which included the fast Fourier, the molecular fragment recognition and the structure factor calculation programs. All the atoms except the hydrogen atoms were located in the E-map corresponding to the set of phases having the greatest combined figure of merit. The structure was refined by least-squares procedures. In the final cycles all the heavy atoms (Cl, O, N, C's) were refined with anisotropic temperature factors, while for hydrogen atoms only the positional parameters were refined, keeping their isotropic temperature fixed. A secondary extinction factor was also refined in the last two cycles. The final  $R$  value for 1106 reflections was 0.038, while the "goodness of fit"  $\sum w(F_o^2 - F_c^2)^2 / (m-s)$  <sup>1/2</sup> was 1.35 for the 1930 non-zero weight reflections, where  $w$  is the weight calculated as  $1/\sigma(F_o)$ ,  $F_o$  and  $F_c$  are the observed and calculated structure factors, and  $m$  and  $s$  are the observed reflections and the parameters refined, respectively. Calculations were carried out on the PDP 11/34 Digital computer of the Centro di Metodologie Chimico Fisiche of the University of Naples, under the SDP system of crystallographic programs. The final atomic parameters together with their estimated standard deviations are listed in Table 2.

Table 2. Final atomic parameters. Fractional coordinates and thermal parameters have been multiplied by  $10^4$ .

ATOM	X/a	Y/b	Z/c	B
Cl	2413(1)	7271(1)	-142(1)	3.0
O	5258(1)	6420(1)	3887(3)	5.9
N	5660(1)	6268(1)	1104(3)	4.8
C(1)	4493(2)	6638(1)	1566(3)	4.9
C(2)	3936(2)	6245(1)	1889(4)	4.9
C(3)	3297(2)	6441(1)	1386(4)	4.7
C(4)	3211(1)	7031(1)	536(4)	4.8
C(5)	3755(1)	7426(1)	228(4)	4.4
C(6)	4396(1)	7231(1)	731(4)	4.5
C(7)	5167(1)	6434(1)	2244(4)	4.4
C(8)	6337(1)	6116(1)	1790(4)	5.0

Table 2 (continuation)<sup>1</sup>

ATOM	X/a	Y/b	Z/c	B
C(9)	6477(1)	5409(1)	2205(4)	4.9
C(10)	7093(1)	5134(1)	1716(4)	5.0
C(11)	7234(1)	4491(2)	2108(5)	6.1
C(12)	6772(2)	4107(2)	2944(4)	6.2
C(13)	6161(2)	4369(2)	3434(4)	6.0
C(14)	6011(2)	5020(2)	3083(4)	5.5
C(15)	5560(1)	6247(1)	-869(4)	4.8
C(16)	5742(2)	5582(2)	-1604(4)	5.2
C(17)	5948(2)	6788(2)	-1813(4)	6.1
HC(2)	4013(13)	5862(12)	2488(36)	
HC(3)	2902(11)	6154(12)	1514(35)	
HC(5)	3671(12)	7809(11)	-321(34)	
HC(6)	4777(10)	7496(12)	560(34)	
HC(10)	7413(13)	5403(12)	1175(36)	
HC(11)	7646(13)	4335(14)	1786(39)	
HC(12)	6867(13)	3647(13)	3268(37)	
HC(13)	5799(12)	4125(14)	3950(39)	
HC(14)	5575(12)	5207(13)	3361(37)	
HC(15)	5058(11)	6316(12)	-1069(34)	
H1C(8)	6675(12)	6310(13)	1006(35)	
H2C(8)	6361(13)	6365(12)	2824(34)	
H1C(16)	6219(13)	5470(12)	-1461(37)	
H2C(16)	5460(12)	5231(13)	-1020(38)	
H3C(16)	5624(13)	5572(13)	-2825(36)	
H1C(17)	6463(13)	6760(13)	-1635(38)	
H2C(17)	5792(13)	6770(14)	-3023(38)	
H3C(17)	5846(13)	7230(13)	-1336(41)	

### Results and discussion

In Figure 1 a stereoscopic view of *N*-*i*-propyl, *N*-benzyl-*p*-chlorobenzamide, prepared from the observed positional parameters with ORTEP, is given. Bond lengths and bond angles are reported in Figure 2 for the same view of the molecule (approximately perpendicular to the shortest crystallographic axis, *g*). Their

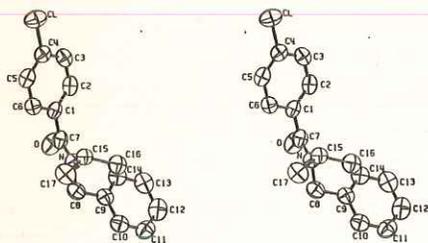


Fig. 1 - Stereo view of *N*-*i*-propyl, *N*-benzyl-*p*-chlorobenzamide.

exception of the two methyls of the *iso*-propyl group, the molecule can be described with three planes: the benzoyl plane, the amide plane and the benzyl plane. Deviations from planarity are observed mainly for the amide plane: the C(8) and

C(15) atoms of the two *N* substituents are  $-0.07$  and  $0.11$  Å below and above the plane passing through the C(7), N, O and C(1) atoms. This "non-planarity" is reflected in values for the dihedral angles C(1) - C(7) - N - C(15) and C(1) - C(7) - N - C(8) of  $-3^\circ$  and  $175^\circ$ , which suggest that a slight rotation around the C(7) - N bond could be responsible of the observed deviation from planarity.

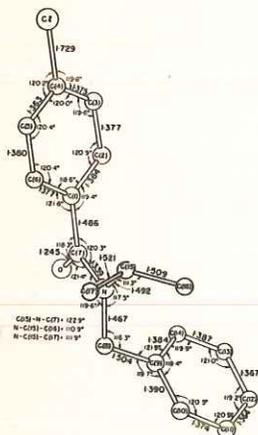


Fig. 2 - Geometry of *N*-*i*-propyl, *N*-benzyl-*p*-chlorobenzamide. Estimated standard deviations are on the average  $0.003$  Å and  $0.3^\circ$  for bond lengths and bond angles, respectively.

of the two methyls of the *iso*-propyl group, which has to be considered the bulkier group on the nitrogen, achieves a conformation *anti* to the carbonyl oxygen atom. This result is opposite to the observation that in solution the *iso*-propyl group, which has to be considered the bulkier of the two groups would be *syn* to the carbonyl oxygen in the major isomer<sup>(6)</sup>. However, solution studies by NMR spectroscopy unequivocally show that the conformation observed in the solid state is also preserved in solution for the major isomer<sup>(7)</sup>.

values should be considered unexceptional; the slight distortions observed between values observed in the present structure and those of the corresponding geometrical parameter in analogous compounds should be ascribed partially to packing forces and to the need of relieving intermolecular interactions different in different crystals. With the excep-

The conformation observed for *N*-*i*-propyl, *N*-benzyl-*p*-chlorobenzamide is very close to that observed for the *o*-bromo analogue, previously reported<sup>(4)</sup>. In both structures the *iso*-propyl group, which has to be considered the bulkier group on the nitrogen, achieves a conformation *anti* to the carbonyl oxygen atom. This result is opposite to the observation that in solution the *iso*-propyl group, which has to be considered the bulkier of the two groups would be *syn* to the carbonyl oxygen in the major isomer<sup>(6)</sup>. However, solution studies by NMR spectroscopy unequivocally show that the conformation observed in the solid state is also preserved in solution for the major isomer<sup>(7)</sup>.

The amide plane and the benzoyl plane are found at an angle of  $111^\circ$  which is different from the angle observed in the o-bromo analogue ( $97^\circ$ ). This difference should be explained by the smaller energy barrier for rotation around the C(1) - C(7) bond in the p-chloro with respect to the o-bromo compound, where the ortho-substitued phenyl ring is almost freezed in a conformation which minimizes the intramolecular interactions.

In Table 3 a list of diedral angles is given for the p-chloro compound and they are compared with the values observed for the o-bromo analogue.

Table 3. Some relevant dihedral angles (degrees) (trans-conformation =  $180^\circ$ ) for N-i-propyl, N-benzyl-benzamides.

Angle	<u>o</u> -bromo	<u>p</u> -chloro
C(2) - C(1) - C(7) - N	86	113
C(2) - C(1) - C(7) - O	-95	-67
C(6) - C(1) - C(7) - N	-99	-71
C(6) - C(1) - C(7) - O	80	109
C(1) - C(7) - N - C(15)	1	-3
C(1) - C(7) - N - C(8)	175	175
O - C(7) - N - C(8)	-4	-5
O - C(7) - n - C(15)	182	177
C(7) - N - C(8) - C(9)	95	92
C(7) - N - C(15) - C(16)	-136	-124
C(7) - N - C(15) - C(17)	102	111
N - C(8) - C(9) - C(10)	136	137
N - C(8) - C(9) - C(14)	-44	-43
C(15) - N - C(8) - C(9)	-91	-90
C(16) - C(15) - N - C(8)	50	58
C(17) - C(15) - N - C(8)	-71	-67

The similarities in the structures is striking. In both cases the i-propyl group is anti to the carbonyl oxygen.

Figure 3 shows the mode of packing of the molecules of N-i-propyl, N-benzyl-p-chlorobenzamide in a projection along the shortest axis (c). Van der Waals and dipole-dipole interactions held the molecules together in the crystal.

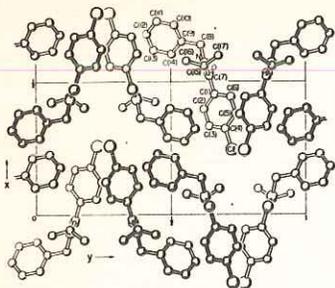


Fig. 3 - Mode of packing of the molecules as view along the c direction.

#### References

1. E. Benedetti in "Chemistry and Biochemistry of Amino Acids, Peptides, and Proteins", B. Weinstein Ed., Marcel Dekker, New York 1982, pp. 105 - 184.
2. H. Kessler, Angew. Chem. **82**, 237 (1970).
3. A. H. Lewin, M. Frucht, K. V. J. Chen, E. Benedetti and B. Di Blasio, Tetrahedron, **31**, 207 (1975).
4. E. Benedetti, E. Broccoli, P. Grimaldi, Red. Accad. Scienze Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze Lettere ed Arti in Napoli, previous paper.
5. G. Germain, P. Main and M. M. Woolfson, Acta Cryst., **A27**, 368 (1971).
6. L. A. La Planche and M. T. Rogers, J. Am. Chem. Soc., **85**, 3728 (1963).
7. A. H. Lewin, personal communication.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, R. Sersale, L. Mangoni.



INFLUENCE OF Na OR K ON THE SYNTHESIS OF ZSM-5  
FROM SYSTEMS CONTAINING TPA AND NH<sub>4</sub>

nota di ALFONSO NASTRO

Presentata dal Socio R. Sersale  
adunanza del 7 Maggio 1983

Riassunto

Viene studiata la sintesi della Zeolite ZSM-5 da Sistemi a rapporto SiO<sub>2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> fisso e contenenti TPA, NH<sub>4</sub> e piccole quantità di Na o K.

Sono riportati i parametri cinetici, le percentuali di cristallizzazione, la dimensione e la morfologia dei cristalli.

I parametri cinetici non vengono modificati sostanzialmente dal contenuto di NH<sub>4</sub> nel sistema, mentre migliorano notevolmente incrementando le moli di catione alcalino.

Summary

Crystallization of ZSM-5 from systems containing TPA, NH<sub>4</sub>, limited amounts of Na and K with SiO<sub>2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> =59 is studied.

Kinetic parameters, percent of crystallization, size and morphology of the crystals are described.

The increase of NH<sub>4</sub> has a limited effect on kinetics parameters while addition to the batch of limited alkali cations produce better kinetic parameters.

Introduction

The synthesis of new zeolites containing organic ions produced new important catalists. ZSM-5, the most important member of new generation of high silica zeolites, is a good catalyst for petrochemical reactions, as reported by many authors (1,2,3,4,5).

The important properties of ZSM-5 induce the researchers to investigate the possibility of improving the synthesis conditions; Erdem and Sand reported the crystallization of ZSM-5 from K-TPA and Na,K-TPA cationic system(6), and from the same system with salt addition(7). They showed the effect of sodium replacement by potassium on the crystallization kinetics and on the crystal morphology. In particular a variation of crystallinity for different K/(Na+K) ratio in the batch was observed(6). The salt addition produced the effect of varying the kinetics of formation and dissolution of the phases, and morphology of the zeolite crystals obtained(7).

Kuei-Jung et al. studied the effect of temperature and alkalinity on the nucleation, crystallization and crystal growth rates, showing an optimum value of the alkalinity related to the value of the  $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$  ratio in the batch composition(8).

Synthesis of ZSM-5 from system with  $(\text{NH}_4)_2\text{O}/(\text{TPA})_2\text{O}=18.75$  has been reported by Bibby et al.(9). Hard aggregates of ZSM-5 can be synthesized using clay as major source of alumina and two cations TPA and Na added as hydroxides(10). In a previous study Nastro and Sand showed the morphology, the crystallization kinetics and the crystal growth of ZSM-5 from systems containing fixed amounts of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$  and a limited alkali (Li, Na or K) mixed alkali and organic cation base system(11).

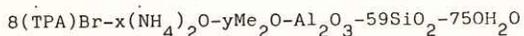
This paper reports the results of a systematic investigation on the synthesis of ZSM-5 from systems containing cations such as  $\text{NH}_4$ , TPA, Na, K allowing both the  $\text{NH}_4/(\text{TPA}+\text{Me})$  and  $\text{Me}/\text{TPA}$  ratios to vary. As starting point the batch composition of a successful synthesis of  $(\text{TPA}-\text{NH}_4)\text{ZSM-5}$  was used (12).

#### Experimental

The chemicals and the synthesis runs, the order of mixing the reactants materials used, and the methods to analyze the

products of synthesis were the same reported in a previous work(11).

The composition, as mole ratios of the oxide, is:



where x has values between 38 and 60, y between 0 and 1.5 and Me is Na or K. The methods to obtain the nucleation time, the rate of crystallization, the percent of crystallization and the size of the crystals are reported elsewhere(6,11,13). Samples for electron microscopy were previously washed with a NaOH 2M solution. (14).

#### Results and Discussion

The products obtained in the different systems investigated were always ZSM-5 as shown by X-ray powder patterns similar to those reported by other authors(6,11,14).

##### a) Systems with Na

In Figure 1 the nucleation times calculated for different compositions of the batch are shown. When only  $\text{NH}_4$  is present in the composition, the nucleation time does not vary with  $\text{NH}_4$  concentration. The course is linear for different amounts of Na in the batch, and the slope of the course decreases in the absolute value for higher  $\text{NH}_4$  contents in the composition. The influence of  $\text{NH}_4$  addition is higher for lower Na addition in the batch, the nucleation times are in fact the same, when 1.5 moles of  $\text{Na}_2\text{O}$  are added mixtures, for every amount of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$ .

The courses of the rate of crystallization are shown in Figure 2, and it can be seen that the rate of crystallization increases when more than 0.5 moles of  $\text{Na}_2\text{O}$  is added to the batch for every content of  $\text{NH}_4$  in the initial mixtures. For equal Na contents, the slope of the courses decreases when the moles of  $\text{NH}_4$  added to the batch increase.

The percent of crystallinity after five days of reaction is plotted in Figure 3; a very small addition of  $\text{Na}_2\text{O}$  moles

to the batch does not favour a substantial increment of the crystallinity; while an amount between 1.0 and 1.5 moles of  $\text{Na}_2\text{O}$  in the mixtures allows the formation of products with a crystallinity higher than 80%. Crystallinity percent obtained with only  $\text{NH}_4$  in the batch composition is low and an higher quantity of  $\text{NH}_4$  decreases the crystallinity of the synthesis products. The course of the crystal size for different amounts of  $\text{NH}_4$  after five days of reaction is about the same even in the presence of different Na contents (Fig.4). An increase of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$  moles in the initial mixtures always generated greater crystals. The larger crystals after five days of reaction were obtained with 1.0 mole of  $\text{Na}_2\text{O}$  in the batch. The course of the size of the crystals in the time is the same showed with 38 moles of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$  in the initial batch(11); in the mixtures with 1.5 moles of  $\text{Na}_2\text{O}$ , in fact, the size increase until two days of reaction and successively decreases while the crystallinity increases.

The morphology of the ZSM-5 crystals obtained with  $\text{NH}_4$  and Na in the system is similar to that showed in a previous paper (11).

#### b) Systems with K

Nucleation times obtained in the systems with different  $\text{NH}_4$  and K content (Fig.5) show curves with the same course; this means that the effect of  $\text{NH}_4$  content is the same for every amount of K in the batch composition. The slope of the course decreases in absolute value when increasing K content in the initial batch, and this value is near to zero when 1.5 moles of  $\text{K}_2\text{O}$  are added for every amount of  $\text{NH}_4$  in the initial mixtures.

The influence of  $\text{NH}_4$  content on the rate of crystallization obtained for different  $\text{K}_2\text{O}$  content is showed in Figure 6. The rate of crystallization increases when  $\text{K}_2\text{O}$  amounts

lower than 1.0 mole are added independently from  $\text{NH}_4$  amount. Mixtures with 1.5 moles of  $\text{K}_2\text{O}$  show a remarkable reduction of the crystallization rate when the  $\text{NH}_4$  content in the initial composition is higher.

The percent of crystallinity after five days of reaction obtained in systems with  $\text{K}_2\text{O}$  in the batch are plotted in Figure 7. A limited amount of  $\text{K}_2\text{O}$  in the batch produces a remarkable increase of the crystallization percent while more than 1.0 mole of  $\text{K}_2\text{O}$  does not produce an increase of the crystallization. The reason of the good behaviour of the crystallinity obtained with a limited amount of K in the batch could be a potassium selectivity for the building units of the ZSM-5; this opinion gets on well with that of other authors(6). The percent of the crystallinity obtained with only  $\text{NH}_4$  in the system is very low and an higher quantity of  $\text{NH}_4$  in the batch decrease the crystallinity of the product.

The effect of the K content on the size of the crystals of ZSM-5 produced after five days of reaction for different amount of  $\text{NH}_4$  in the initial mixture is showed in Figure 8.

Larger crystals are obtained with 1.0 mole of  $\text{K}_2\text{O}$  in the composition for every amount of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$  in the batch. With 48 and 60 moles of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$  and 1.5 moles of  $\text{K}_2\text{O}$  in the batch the variation of the crystal's size of ZSM-5 is similar to that obtained with 38 moles of  $(\text{NH}_4)_2\text{O}$ (11).

#### Conclusions

The above reported results shown that:

- i) In systems containing only TPA and  $\text{NH}_4$ , the increase of  $\text{NH}_4$  has a limited effect on the nucleation time, on the rate of crystallization and on the percent of crystallinity after five days of reaction, while markedly influences the size of ZSM-5 crystals;

- ii) In systems containing TPA,  $\text{NH}_4$  and Na, a limited increase of Na has an effect on the above mentioned parameters strongly dependent on the  $\text{NH}_4$  content;
- iii) In systems containing TPA,  $\text{NH}_4$  and K, the influence of K on the kinetic parameters is normally highly affected by  $\text{NH}_4$  content;
- iiii) The presence in the batch of Na or K produces larger crystals for every  $\text{NH}_4$  content and the most favorable conditions correspond to Me/Al ratio equal to 1 after five days of reaction.

#### Acknowledgments

This work has been carried out with the financial support of the Italian National Research Council (CNR - Progetto Finalizzato Chimica Fine e Secondaria)

The author gratefully acknowledges Proff. R. Aiello and L. B. Sand for fruitful discussions.

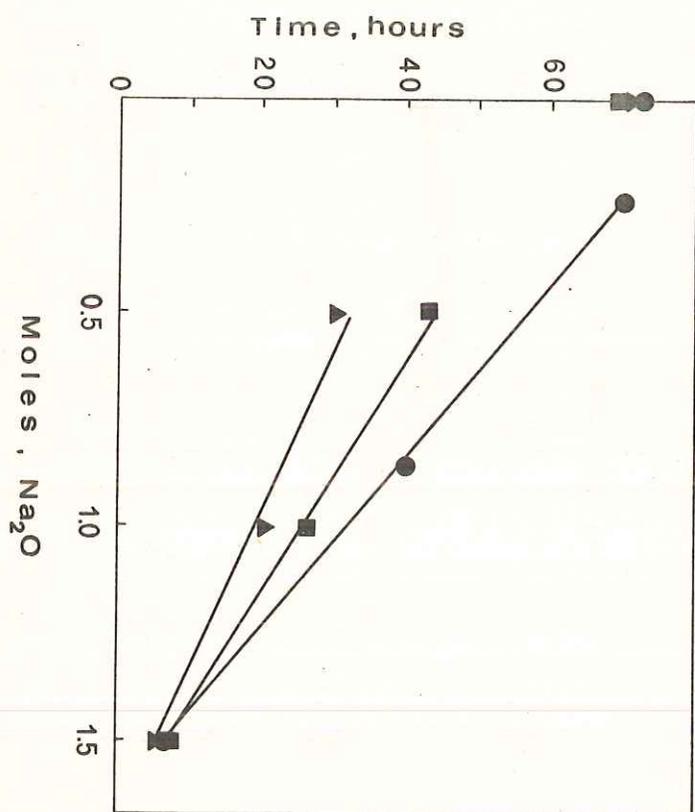
## References

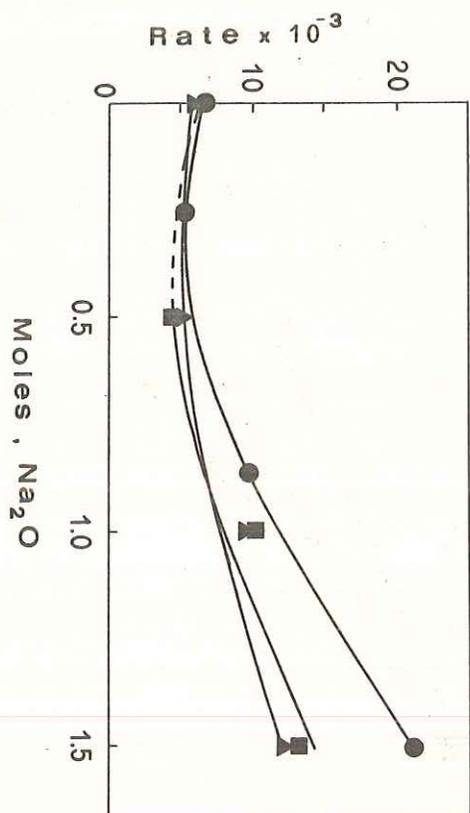
- 1) US. Pat.4007231; Ger. Offen.2633882
- 2) Brit. Pat.1210786
- 3) US. Pat. 4002698
- 4) Meisel S.L., Mc Culloughm J.P., Lechthaler C.H. and Weisz P.B., Chem. Tech. 6,86,1976.
- 5) Chang C.D. and Silvestri A.S., J. Catal. 47,249,1977.
- 6) Erdem A. and Sand L.B., J. Catal. 60,241,1979.
- 7) Erdem A. and Sand L.B., Proc.5th Int.Conf.Zeolites,ed L.V. C.Rees, Heyden, London 64,1980.
- 8) Kuei-Jung Chao,Tseng Chang Tasi and Mei Shu Chen, J.Chem. Soc.Far.Trans.1 77,547,1981
- 9) Bibby D.M.,Milestone N.B. and Aldridge L.B.,Nature 285,31, 1980
- 10) U.S. Patent 4,091.007
- 11) Nastro A. and Sand L.B., Zeolites 3,57,1983.
- 12) Ghamami M. and Sand L.B., Personal Communication.
- 13) Culfaz A. and Sand L.B., Adv.Chem.Ser. 121,140,1973.
- 14) US. Pat. 3702866

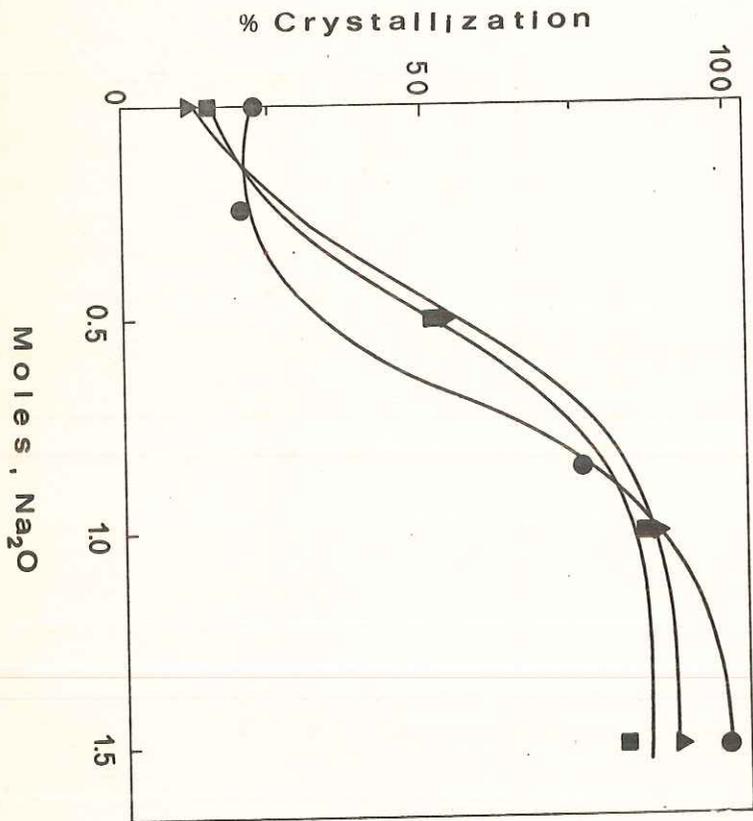
La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, L. Jannelli, R. Sersale.

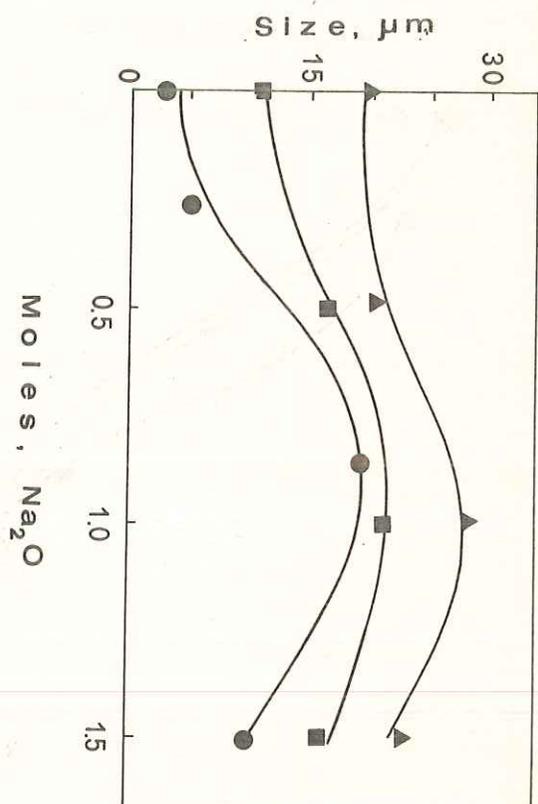
## List of figures

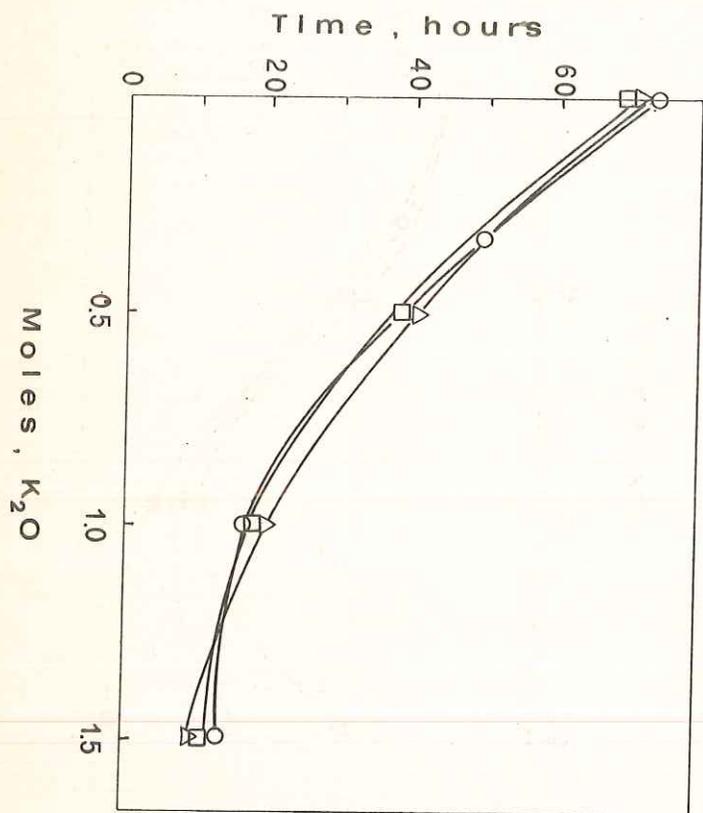
- 1) Nucleation times of the system with  $\text{Na}_2\text{O}$ : (●)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ;  
(■)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (▲)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 2) Rates of crystallization of the system with  $\text{Na}_2\text{O}$ :  
(●)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (■)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (▲)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 3) Percent of crystallization after five days of reaction of the system with  $\text{Na}_2\text{O}$ : (●)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (■)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (▲)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 4) Length of the crystals of ZSM-5 produced after five days of reaction in system with  $\text{Na}_2\text{O}$ : (●)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (■)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ;  
(▲)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 5) Nucleation times of the system with  $\text{K}_2\text{O}$ : (○)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ;  
(□)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (△)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 6) Rates of crystallization of the system with  $\text{K}_2\text{O}$ : (○)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ;  
(□)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (△)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 7) Percent of crystallization after five days of reaction of the system with  $\text{K}_2\text{O}$ : (○)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (□)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (△)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$
- 8) Length of the crystals of ZSM-5 produced after five days of reaction in system with  $\text{K}_2\text{O}$ : (○)  $38(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ; (□)  $48(\text{NH}_4)_2\text{O}$ ;  
(△)  $60(\text{NH}_4)_2\text{O}$

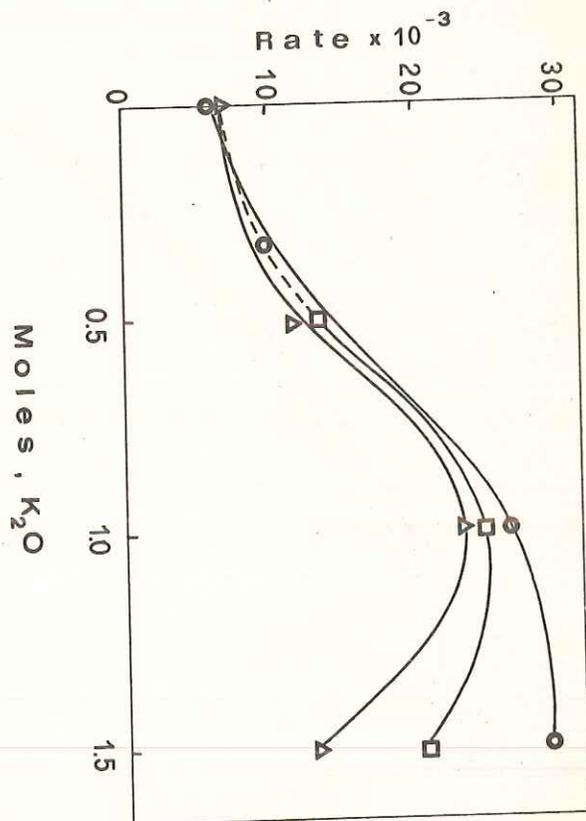


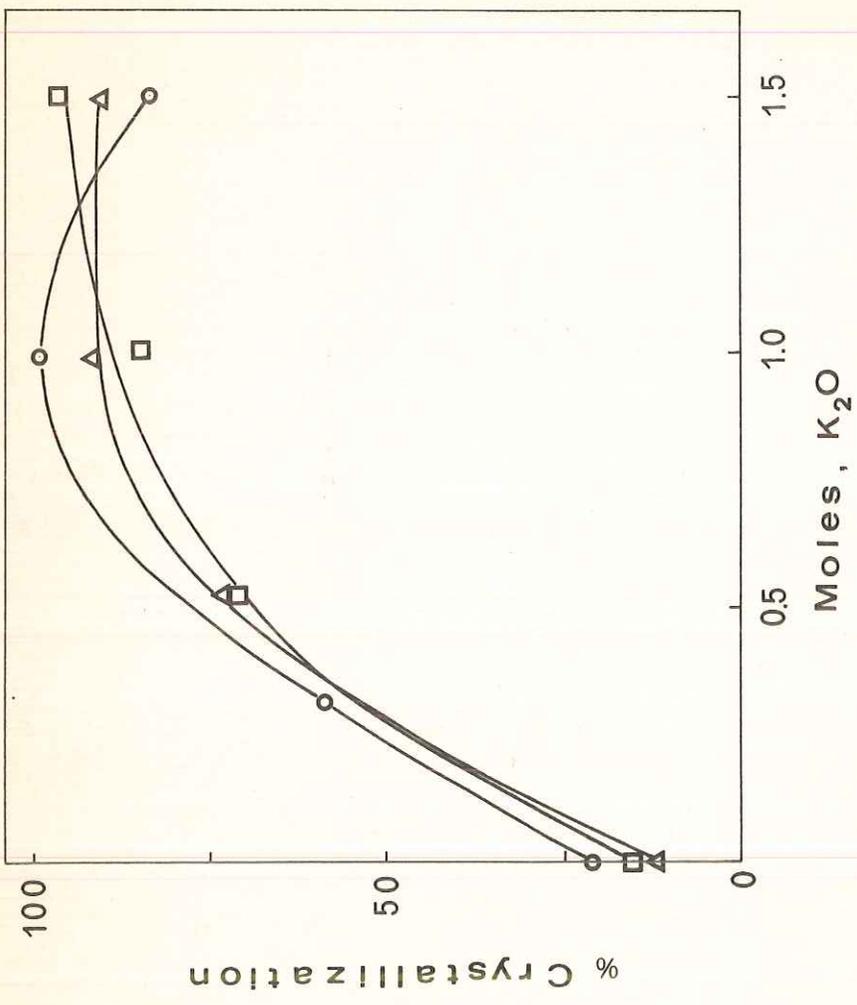


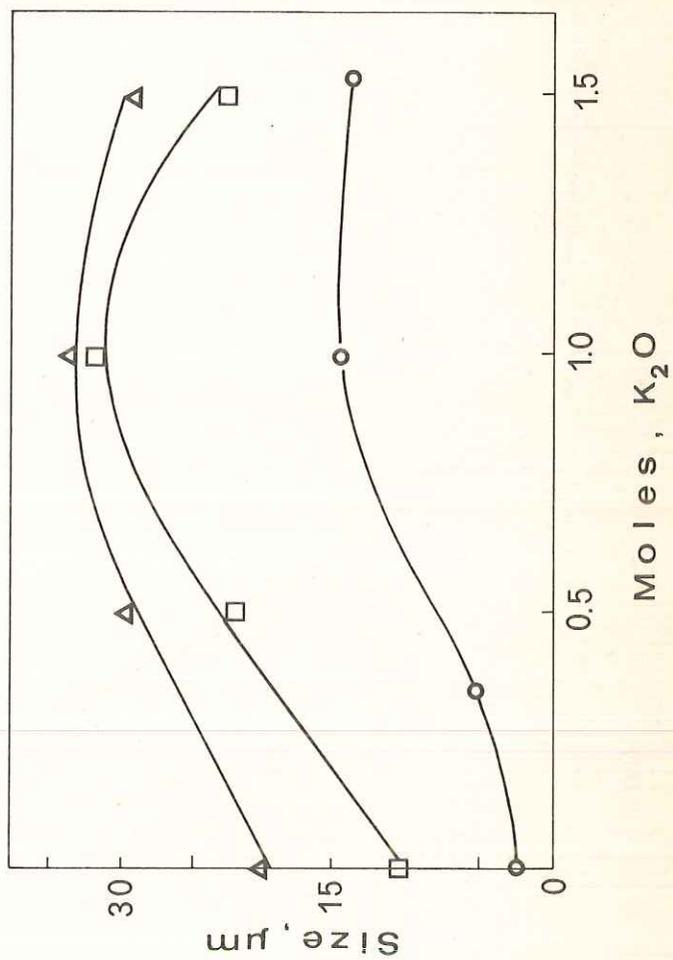












## SEPARATION OF OXYGEN AND NITROGEN FROM AIR BY ZEOLITIC TUFF

Nota di Paolo Ciambelli<sup>x</sup>, Vincenzo  
De Simone<sup>x</sup> e Raffaele Valentino<sup>x</sup>,  
presentata dal Socio Ordinario  
Prof. Riccardo Sersale  
Adunanza del 7/5/1983

### Riassunto

Mediante il metodo gas-cromatografico, sono state determinate le proprietà adsorbenti per l'ossigeno e l'azoto di un tufo cabasitico, al fine di valutare la possibilità di utilizzare zeoliti naturali italiane nei processi PSA per l'arricchimento dell'aria in ossigeno. Sono state ricavate le isoterme e i calori di adsorbimento, nonché il coefficiente di separazione O<sub>2</sub>-N<sub>2</sub>, per differenti condizioni di temperatura e ricoprimento sulla cabasite, tal quale e dopo trattamento di scambio ionico. I campioni di zeolite arricchiti in calcio hanno mostrato la maggiore selettività di adsorbimento per l'azoto rispetto all'ossigeno.

### Abstract

Adsorption properties of oxygen and nitrogen on a chabazite tuff have been determined by gas-chromatographic method, with the aim of checking the potential utilization of italian natural zeolites in PSA processes for O<sub>2</sub> enrichment of air. Adsorption isotherms, heats of adsorption, and separation coefficients O<sub>2</sub>-N<sub>2</sub> have been evaluated at different temperature and coverage of chabazite in the original form and after ion-exchange. Calcium exchanged chabazite exhibited the highest selectivity for nitrogen in respect to oxygen adsorption.

### Introduction

In recent years natural and synthetic zeolites applications have attracted growing interest of basic and industrial research. Zeolites are commonly employed in many processes as high selectivity adsorbents, ion-exchangers, desiccants catalysts /1/. Production of oxygen from air by pressure swing adsorption (PSA) is an example of such a process /2/.

PSA plants using zeolites for oxigen generation are more economical than cryogenic systems where limited output of oxygen at purity not higher than 70-80% is needed, due to low fixed and operating cost. PSA processes are based on short time cycle adsorption-desorption on two or three fixed beds of adsorbent: one of the components of the gas mixture is selectively adsorbed on the first bed at pressure higher than atmosphere, while the second bed is re-

<sup>x</sup> Istituto Chimico, Università di Napoli, Via Mezzocannone 4, 80134 NAPOLI, Italy.

generating by evacuation. Zeolites offer advantages in comparison to other common adsorbents such as silica gel or alumina, because of high selectivity exhibited in the adsorption of many molecules. In the case of air separation, zeolites, in spite of low adsorption capacity, show good selectivity for nitrogen, making PSA an economically viable process. Oxygen production by PSA employs zeolites 5A as adsorbent, but natural zeolites appear as promising materials. Natural mordenite and clinoptilolite have been proposed as nitrogen selective adsorbents and their selectivity can be improved by ion-exchange /3,4/.

Among natural zeolites chabazite is similar to zeolite A in respect to pore opening, cation mobility, adsorption properties for polar molecules. In Italy deposits of natural zeolites are widespread, originating from volcanic glass alteration, not yet exploited to date /5/. Possible uses of these zeolites have been proposed as adsorbents /6-8/, catalysts /9/, ion-exchangers /10,11/.

From the previous statements we planned a research with the objective of checking the feasibility of employing italian zeolites in PSA processes for oxygen production. In this paper preliminary results are presented related to the adsorption properties for oxygen and nitrogen exhibited by a natural chabazite and the different forms obtained by ion-exchange.

#### Experimental part

Materials. - The material tested is a chabazite containing tuff, collected in the volcanic area of Mt.Vulturne.

Physical and chemical characteristics have been described in /12/ as sample n°1. Tuff samples were tested in the original form and after ion-exchange treatment. Samples were contacted for 24 hours, at temperature of 60°C, with a solution of metal chloride to be exchanged, NaCl, KCl, MgCl<sub>2</sub>, CaCl<sub>2</sub>, respectively.

Cation composition was determined by atomic adsorption spectrophotometry. Adsorption tests. - Adsorption isotherms of N<sub>2</sub> and O<sub>2</sub> were determined by gas-chromatographic method. A standard gaschromatograph HP 5750 equipped with a TC detector was used /13/. Columns, 6 mm i.d. and 1 m length, were loaded with the fraction 500-850 μm, obtained by grinding and sieving the tuff samples. Before adsorption measurements the material was activated in the columns by feeding He at 120°C overnight and 350°C for 1 hour. Known volumes of pure gas were injected in the gaschromatograph by a sampling valve. Dead space of the system was determined by injecting hydrogen, which passed unadsorbed through zeolite bed. Typical chromatograms are reported in Fig.1. From the area of chromatographic peaks, measured by an electronic integrator HP 3570, and from experimental conditions, the partial pressure of gas and equilibrium quantity adsorb-

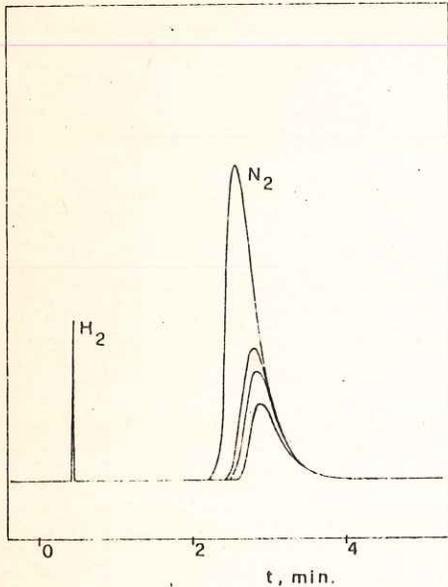


Fig.1 - Chromatogram showing nitrogen adsorption peaks obtained from different injected volume.

Table 1. - Cation composition and separation coefficient ( $K_s$ ) for chabazite tuff samples tested

Sample	Percentage of Cation Equivalents				$K_s$
	$Na^+$	$K^+$	$Mg^+$	$Ca^+$	
TC1	8.2	27.6	15.2	49.0	0.34
NaTC1	40.1	26.9	10.9	22.1	0.41
KTC1	5.2	43.0	15.6	36.2	0.26
MgTC1	9.1	26.9	20.8	40.5	0.33
CaTC1	6.0	26.1	12.7	55.2	0.43

Moreover in the sample MgTC1, the low content of magnesium ions reflects the well known limited exchange capacity of chabazite for this cation. On the contrary the sample KTC1 was obtained at milder exchange conditions than for other cations, as higher extent of potassium exchange resulted in a material unable to separate  $O_2$  and  $N_2$ .

In Fig.2 the adsorption isotherms of  $O_2$  on the original tuff are reported, for oxygen partial pressure up to 3 mm Hg at temperature of 20, 50 and 70°C. Full lines represented in Fig.2 were obtained by fitting the experimental points with Langmuir relation:

ed on the solid were calculated, as reported in /13/.

Pulses of air were injected to the same columns; retention times  $t_{O_2}$  and  $t_{N_2}$  defined the separation coefficient:

$$K_s = \frac{t_{N_2} - t_{O_2}}{t_{N_2} - t_{O_2}}$$

#### Results and Discussion

Chemical analysis of the original rock and the materials obtained by ion-exchange is reported in Table 1, as percentage of cation equivalents. The values indicate partial extent of exchange, but it must be reminded that they are affected by impurities present with chabazite in the tuff.

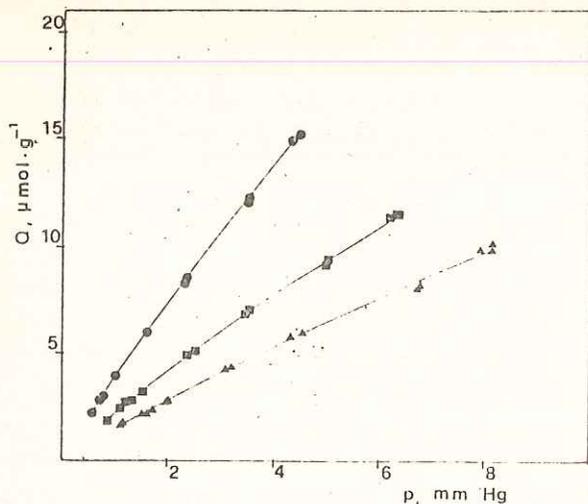


Fig.2 - Oxygen adsorption isotherms on TC1.  
 ● T=20°C    ■ T=50°C    ▲ T=70°C.

$$Q = Q_0 \frac{Kp}{1+Kp}$$

where  $Q$  is the adsorbed amount expressed as  $\mu\text{moles per gram of tuff}$ ,  $Q_0$  the monolayer capacity,  $p$  the partial pressure of gas as mm Hg. The parameters  $Q_0$  and  $K$  were estimated by linear regression method and are reported in Table 2 for all the isotherms. Langmuir equation is a model commonly used to describe adsorption on zeolites in a range of partial pressures where the isotherm exhibits a limited

Table 2. - Values of parameters  $Q_0$  and  $K$  of Langmuir equation. ( $Q_0$  in  $\mu\text{mol/g}$ ,  $K$  in  $\text{mm Hg}^{-1}$ )

Sample	Nitrogen						Oxygen					
	T=20°C		T=50°C		T=70°C		T=20°C		T=50°C		T=70°C	
	$Q_0$	$K$	$Q_0$	$K$	$Q_0$	$K$	$Q_0$	$K$	$Q_0$	$K$	$Q_0$	$K$
TC1	98.0	0.103	56.5	0.084	87.7	0.030	109.4	0.037	58.8	0.038	73.0	0.019
NaTC1	211.9	0.059	143.3	0.039	94.3	0.034	153.6	0.028	88.6	0.027	60.8	0.015
KTC1	224.0	0.033	106.7	0.033	67.8	0.032	122.0	0.031	73.9	0.028	47.4	0.029
MgTC1	100.4	0.095	100.2	0.041	88.3	0.026	122.3	0.032	86.6	0.025	64.6	0.021
CaTC1	56.1	0.232	59.5	0.083	68.1	0.039	125.5	0.031	55.7	0.040	64.7	0.021

curvature. In Fig.3 the adsorption isotherms of  $N_2$  on the original tuff are reported for experimental conditions comparable to  $O_2$  adsorption. The isotherms show, even at low partial pressure, evidence of curvature, much more pronounced than for  $O_2$ . Adsorbed amount is nearly doubled and temperature effect is comparable to that observed for  $O_2$ . Parameters of Langmuir equation for  $N_2$  adsorption are shown in Table 2. Differences in respect to the values estimated for  $O_2$  isotherms are relevant even if parameters estimation is poor, due to near linearity of the isotherms. The values of  $Q_0$ , corresponding to a monolayer coverage, are comparable at different temperatures, given the errors in parameters estimation. Therefore values of the parameters can be utilized only for the analytical representation of the experimental data. From the fitted isotherms isosteric heats

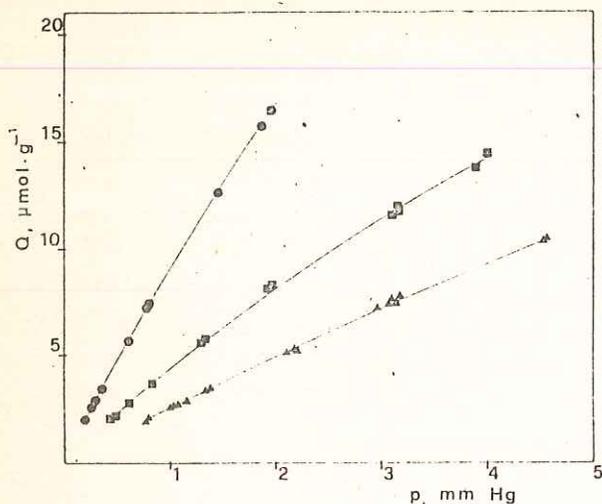


Fig.3 - Nitrogen adsorption isotherms on TCl.

● T=20°C    ■ T=50°C    ▲ T=70°C

is qualitatively and quantitatively different from that for O<sub>2</sub>. This difference resulted in the value of 0.34 for the separation coefficient, reported in Table 1.

Table 3. - Isosteric heats of adsorption of O<sub>2</sub> and N<sub>2</sub>. (Kcal/mol).

Sample	q <sub>stO<sub>2</sub></sub>	q <sub>stN<sub>2</sub></sub>
TCl	4.0	5.2
NaTCl	3.8	5.2
KTCl	3.7	4.6
MgTCl	3.9	5.3
CaTCl	3.7	5.7

and reduced by K<sup>+</sup> exchange in comparison with TCl. Calcium exchange enhances the curvature of isotherm, that is steeper at very low coverage but tends to be constant at lower pressure than for NaTCl and KTCl, as shown by the parameters of Langmuir equation (Table 2). Although, as previously recalled, their reliability is limited, all the values of the adsorption equilibrium constant and monolayer coverage clearly show the effect of cation on the shape of isotherm, that is on the interaction N<sub>2</sub>-chabazite. Moreover stronger interaction of N<sub>2</sub> with calcium exchanged chabazite is also evidenced by the values of isosteric heats following the sequence:

of adsorption were calculated by means of the Clausius-Clapeyron equation:

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial 1/T}\right)_Q = -\frac{q_{st}}{R}$$

Heats were not found to change with coverage within experimental error and are in good agreement with reported data /14/. Values calculated in the range 20-70°C are shown in Table 3. Comparison to the results obtained for O<sub>2</sub> adsorption clearly confirms that N<sub>2</sub>-zeolite interaction

In Fig.4 adsorption isotherms of O<sub>2</sub> and N<sub>2</sub> on the material obtained by ion exchanging the tuff are shown. While oxygen adsorption is nearly unaffected by the cation introduced into chabazite, nitrogen adsorption appears to be strongly influenced. Exchange by Na<sup>+</sup> and K<sup>+</sup> enhances the linearity of N<sub>2</sub> isotherms and the adsorbed amount is increased by Na<sup>+</sup>

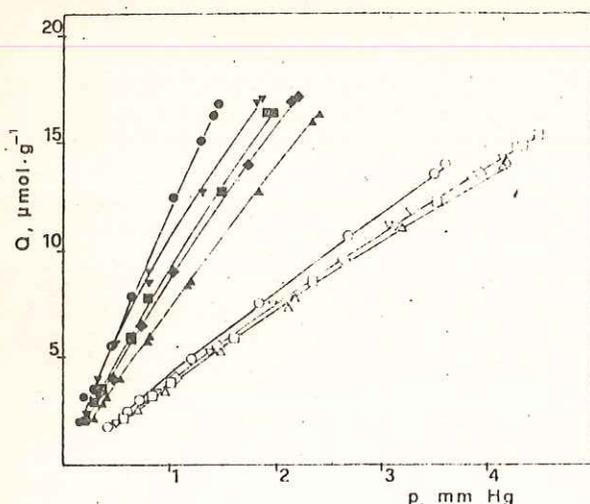


Fig.4 - Adsorption isotherms of oxygen (empty dots) and nitrogen (full dots) at 20°C  
 □ TlCl; ○ NaTlCl; △ KTCl; ◇ MgTlCl; ▽ CaTlCl.

on  $O_2$  and  $N_2$  adsorption is related to the strong electrostatic interaction of  $N_2$  with the cation as a consequence of its quadrupole moment /15/. The sequence expected for this interaction is the same we have found for isosteric heats, in agreement with findings on other zeolites /16/. This observation seems to confirm that chabazites exchanged with divalent ions should exhibit better selectivity for nitrogen adsorption in air separation /17/.

#### References

- /1/ Flanigen E.M., "Molecular Sieve Zeolite Technology. The first Twenty-five Years.", *Proceed. Fifth Intern.Conf.Zeolites*, L.V.Rees Ed., Heyden, London, 1980.
- /2/ Armond J.W., "The Practical Application of Pressure Swing Adsorption to Air and Gas Separation" in the *Properties and Applications of Zeolites*, R.P. Townsend Ed., Chemical Society Spec.Pub.n°33, London, 1979, p.92.
- /3/ Galabova I.M., Haralampiev G.A., "Oxygen enrichment of air on alkaline form of Clinoptilolite", *ibid.*, p.121.
- /4/ Minato H., Tamura T., "Production of Oxygen and Nitrogen with Natural Zeolites", in *Natural Zeolites, Occurrence, Properties, Use*, L.B.Sand and F.A.Mumpton Eds., Pergamon Press, Oxford, 1978, p.509.
- /5/ Sersale R., "Occurrence and Uses of Zeolites in Italy", *ibid.*, p.285.
- /6/ Aiello R., Colella C., "Zeolitic Tuff as Desiccant", *La Chimica e L'Industria* 54, 303 (1972).
- /7/ Ciambelli P., De Simone V., Porcelli C., Valentino R., "Water Adsorption on Chabazite Tuff", *ibid.* 61, 14 (1979).
- /8/ Aiello R., Colella C., Di Lorenzo A., "Impiego di zeoliti naturali per l'abbattimento di inquinanti in effluenti gassosi. I. Adsorbimento di  $SO_2$  su tufo a cabasite", *Inquinamento*, 41 (1980).
- /9/ Alabiso E., Ciambelli P., De Simone V., Porcelli C., Valentino R., "Catalytic Partial Oxidation of Hydrogen sulfide on Chabazite Tuff", *React.Kinet.Catal. Lett.*, 12, 451 (1979).

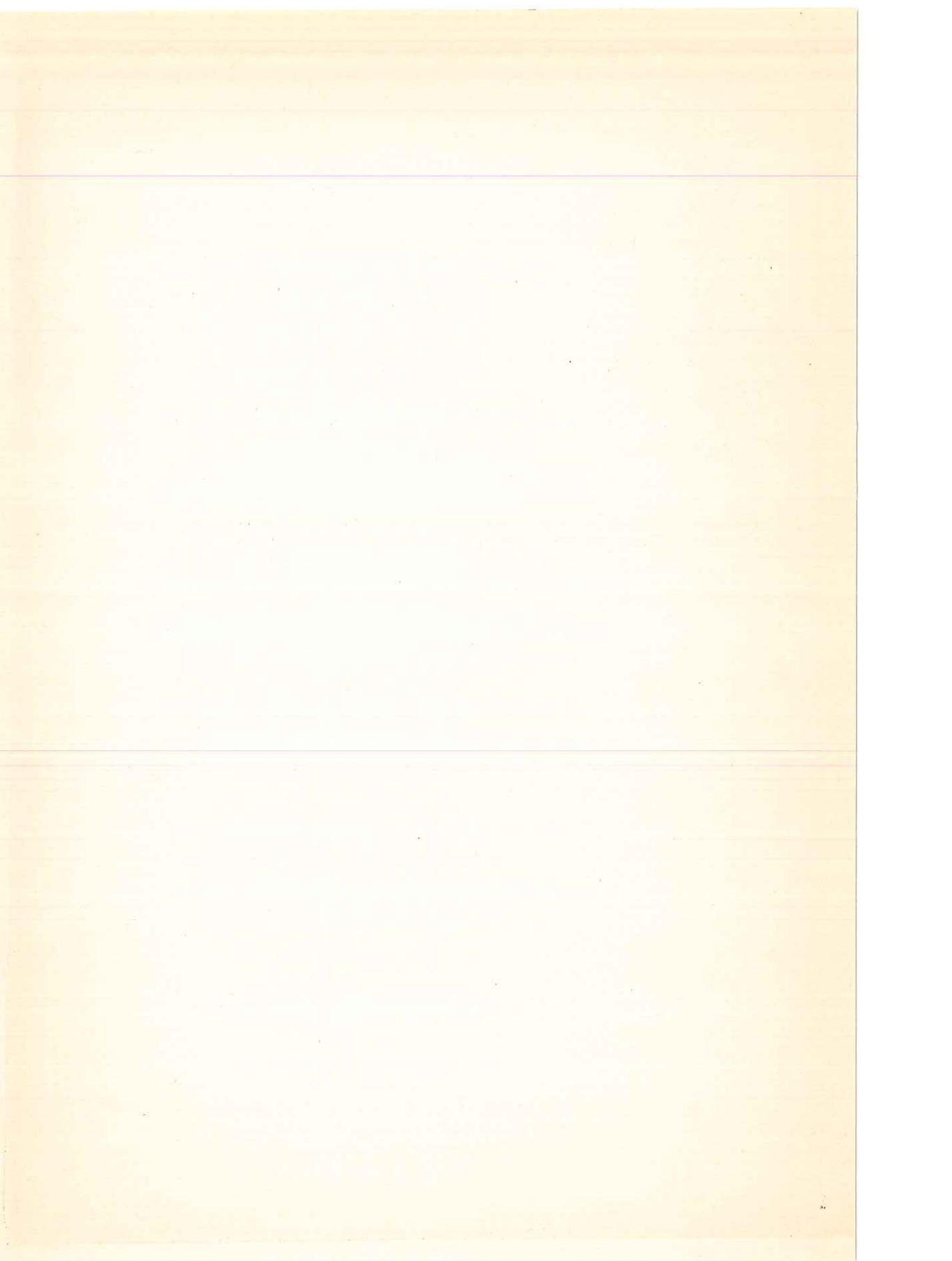
Ca > Mg > Na > K

The same order is found in the values of the separation coefficient (Table 1).

Apart from MgTlCl where the effect of magnesium is limited by the low degree of exchange, the sequence follows from the different intensity of the forces effective in the adsorption on zeolites (dipole, quadrupole, polarization, dispersion, repulsion interactions). Different effect of cation exchange

- /10/ Aiello R., Colella C., Nastro A., "Natural Chabazite for Iron and Manganese Removal", in *The Properties and Applications of Zeolites*, R.P. Townsend Ed., Chemical Society Spec.Pub. n°33, London, 1979, p.258.
- /11/ Ciambelli P., Corbo P., Porcelli C., "Ammonium ion exchange by Phillipsite Tuff in relation to Aquacultural Systems", *Zeo-Agriculture* "82, Rochester (USA), 1982, in press.
- /12/ Ciambelli P., Porcelli C., Valentino R., "Physico-chemical Properties of Sedimentary Chabazites from Central-southern Italy", *Proceed.*, Fifth Intern.Conf.on Zeolites, L.V. Rees Ed., Heyden, London, 1980,p.119.
- /13/ Ciambelli P., Crescitelli S., De Simone V., Russo G., "Adsorption Characteristics of Benzene Toluene and Ethylbenzene on Active Alumina by Gas-chromatography", *Ann.Chim.* 63, 701 (1973).
- /14/ Barrer R.M., Davis J.A., "Sorptions in Decationated Zeolites. I. Gases in Hydrogen-chabazite", *Proc.Roy.Soc.Ser.A*, 289 (1970).
- /15/ Barrer R.M., "Specificity in Physical Sorption", *J.Coll.Sci.* 21, 415 (1955).
- /16/ Bosáček V., "The Role of Cations in Chromatography and Adsorption of Gases on X-type Zeolites", in *Molecular Sieves*, Soc.Chim.Ind., London 1968,p.164.
- /17/ Vaughan D.E.W., "Zeolites for Air Separation", *German Offen*, 2, 347, 574 (1974).

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci A. Scherillo, L. Jannelli, R. Sersale.



I N D I C E

A. Scherillo - Commemorazione di Giuseppe Imbò Commemorazione letta da Antonio Scherillo nell'adunanza del 7 Novembre 1981 .....	pag. 9
M. Rigutti - Commemorazione di Tito Nicolini (1899-1981) Commemorazione letta da Mario Rigutti nell'adunanza del 6 Febbraio 1982 .....	" 19

Scienze della Terra

S. Di Nocera, B. Russo, M. Torre - I depositi marini del ciclo pliocene inferiore-medio nei dintorni di Vietri di Potenza .....	" 87
M.T. Quagliariello, G. Napoleone - Dalla revisione del grande terremoto "napoletano" del 16 Dicembre 1857 un criterio di zonizzazione sismica .....	" 107
V. Zamparelli, L. Brancaccio, P. Di Girolamo - Nuove considerazioni sul terrazzo marino de 'La Starza' presso Pozzuoli .....	" 119

Scienze Chimiche

E. Finamore, L. Minale, M. Ali Mohammed - The Sterols of the Somalian Sponge Pleraphysilla Papyracea .....	" 81
E. Benedetti, E. Broccoli, P. Grimaldi - Restricted rotation in tertiary Amides. The Crystal structure of N- <u>i</u> -Propyl, N-Benzyl- <u>o</u> -Bromobenzamide .....	" 195
E. Benedetti, E. Broccoli, A. Di Nola - Restricted rotation in Tertiary Amides. The Crystal Structure of N- <u>i</u> -Propyl, N-Benzyl- <u>p</u> -Chlorobenzamide .....	" 203
A. Nastro - Influence of Na or K on the Synthesis of ZSM-5 from Systems Containin TPA and NH <sub>4</sub> .....	" 211
P. Ciambelli, V. De Simone, R. Valentino - Separation of Oxygen and Nitrogen from air by Zeolitic tuff ....	" 227

Scienze Matematiche

N. Avena, T. De Ruvo - Alcuni teoremi di singolarità eliminabili per soluzioni deboli di equazioni non lineari quasi-ellittiche .....	" 29
---	------

S. Dragotti - Una costruzione per particolari sets ....	pag.	43
S. Dragotti - Sulle strutture differenziabili parziali di un microfibrato su una varietà PL .....	"	53
L. Bader - Sull'isomorfismo di H-Anelli dotati di un modulo irriducibile e quasi fedele .....	"	65
S. Dragotti - Ostruzioni ad estendere strutture differenziabili .....	"	133
G. De Simone, G. Di Maio - Alcune osservazioni su una classe di assiomi di separazione più deboli di $T_1$ ...	"	143
M. Renzi - Un'osservazione sulle funzioni assolutamente continue con derivata prima a variazione limitata ..	"	155
G. Caradonna - Sui sistemi di equazioni non lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico, in due variabili indipendenti .....	"	163
A. Leone, M. Maj - Gruppi finiti non submodulari a quozienti propri submodulari .....	"	185